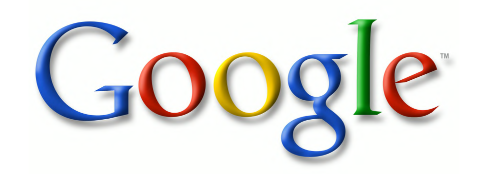



B 951,493



Hachette

CORRESPONDANCE

SUR L'ÉCOLE

IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

IMPRIMERIE DE P. GUEFFIER.

CORRESPONDANCE
SUR L'ÉCOLE
IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE CETTE ÉCOLE;

Jean Nicolas Pierre
PAR M. HACHETTE,

Professeur à l'École impériale Polytechnique, et Professeur-Adjoint à la Faculté des Sciences de Paris.

Janvier 1809. —— Mars 1813.

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez J. KLOSTERMANN, Libraire de l'Ecole impériale Polytechnique.

1813.

ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

Janvier 1813.

Le nombre d'Elèves admis à l'Ecole Polytechnique, depuis sa création (année 1795), est de 2817. Ils ont été choisis parmi les candidats qui se sont présentés aux concours d'admission; le nombre de ces candidats s'élève à 6555.

L'Ecole Polytechnique a fourni aux Services publics 1459 Officiers militaires et 409 Officiers civils; à l'Administration publique, des Magistrats (1) revêtus d'emplois [redacted] importans; à l'Institut, plusieurs Savans (2) très-distingués. Un de ces derniers, M. Malus, enlevé par une mort prématurée, a laissé un nom qui sera toujours cité avec éloge dans l'histoire des sciences.

Un grand nombre d'autres Elèves suivent avec le plus grand succès la carrière de l'Instruction, des Arts, et des Manufactures.

(1) M. De Chabrol, Préfet de la Seine.
(2) MM. Biot, Gay-Lussac, Arago, Poisson.

ÉTAT des personnes qui composent le corps enseignant de l'École Polytechnique au 1er. janvier 1813.

Analyse.

MM. Labey, Ampère, Poinsot.

Analyse appliquée à la mécanique.

MM. Prony, Poisson.

Géométrie descriptive; analyse appliquée à la géométrie.

MM. Monge, Hachette, Arago.

Art militaire, Topographie.

Professeur, M. Duhays. — *Chef de topographie*, M. Clerc.

Architecture.

M. Durand.

Physique.

Professeur, M. Hassenfratz. — *Répétiteur*, M. Petit.

Chimie.

Professeurs, MM. Guyton-Morveau, Gay-Lussac, Thénard.
Répétiteurs, MM. Collin, Cluzel.

Dessin de la figure.

Professeur, M. Vincent. — *Maîtres de dessin*, MM. Mérimée, Lemire (J.), Lemire (A.).

Littérature.

Professeur, M. Andrieux. — *Bibliothécaire*, M. Barruel.

Répétiteurs pour les sciences mathématiques.

MM. Reynaud, Binet (P.-A.), Binet (J.-P.-M.).
Adjoints, MM. Lefébure-de-Fourcy, Demarteau, De Stainville, Pommiés.

Dessinateurs pour la géométrie descriptive, et ses applications.

MM. Girard, Gauché, Delaunay.

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

N°. Ier. *Janvier* 1809. (2e. volume.)

§. Ier.

GÉOMÉTRIE.

Sur la Pyramide triangulaire.

Par M. MONGE.

THÉORÈME I.

Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques (1).

PREMIÈRE DÉMONSTRATION.

Concevons la solidité de la pyramide divisée en une infinité de filets prismatiques dont les bases soient infiniment petites dans leurs deux dimensions, et dont la longueur finie soit parallèle à une arête quelconque de la pyramide; tous ces filets seront terminés par les deux faces de la pyramide qui se coupent dans l'arête opposée. Cela posé, si par l'arête opposée, et par le milieu de la première, on mène un plan, ce plan coupera tous les filets en deux parties égales, comme il coupe en deux parties

(1) Voyez la définition des *arêtes opposées*, 1er. vol., pag. 440.

égales l'arête qui leur est parallèle ; il passera donc par le centre de gravité de chacun d'eux, et par conséquent par le centre de gravité de leur systême, qui est la pyramide elle-même.

Par la même raison, si par la première arête et par le milieu de son opposée, on mène un second plan, ce plan passera aussi par le centre de gravité de la pyramide; donc le centre de gravité sera dans l'intersection des deux plans; mais chacun de ces plans passe par les milieux des deux arêtes opposées, donc leur intersection passe par ces deux points; donc la droite menée par les milieux de deux arêtes opposées contient le centre de gravité de la pyramide, qui se trouve par conséquent à l'intersection commune des trois droites menées par les milieux des arêtes opposées.

Or, on sait que les trois droites menées par les milieux des arêtes opposées, sont les axes du parallélipipède circonscrit, et se coupent réciproquement dans leurs milieux. Donc le centre de gravité de la pyramide est au milieu de la droite qui joint les milieux des deux arêtes opposées quelconques. *C. Q. F. D.*

Dans cette démonstration, nous avons considéré les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées; dans la suivante nous ne considérerons qu'une seule d'entr'elles.

SECONDE DÉMONSTRATION.

Après avoir fait passer par une quelconque des arêtes de la pyramide un plan parallèle à l'arête opposée, concevons que ce plan se meuve parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il vienne passer par l'arête opposée; ce plan, dans chacune de ses positions successives, coupera la pyramide suivant un parallélogramme, car il coupera les deux faces contiguës à la première arête en deux droites qui seront parallèles à cette arête, et par conséquent parallèles entr'elles, et il coupera les deux autres faces qui sont contiguës à l'arête opposée en deux autres droites qui seront parallèles à cette seconde arête, et par conséquent parallèles entr'elles. De plus, tous les parallélogrammes obtenus de cette manière auront leurs côtés homologues parallèles entr'eux, et leurs angles correspondans égaux; mais ils ne seront pas semblables, parce que le rapport de leurs côtés contigus ne sera pas le même; c'est l'un de ces côtés qui devient nul quand le plan passe par une des arêtes, et c'est l'autre qui s'évanouit quand le plan passe par l'arête opposée.

Cela posé, concevons que le plan dans son mouvement ait divisé la solidité de la pyramide en une infinité de tranches parallélogrammiques d'égale épaisseur, puis menons un plan par l'une des deux arêtes et par le milieu de son opposée; ce plan

divisera chaque tranche en deux parties égales, parce qu'il passera par les milieux des côtés de cette tranche, parallèles à l'arête opposée ; il passera donc par le centre de gravité de chacune des tranches. Par la même raison, si par la seconde arête et par le milieu de la première on mène un second plan, ce plan coupera toutes les tranches en deux parties égales, et passera par le centre de gravité de chacune d'elles ; donc l'intersection de ces deux plans passera par les centres de gravité de chacune des tranches. Mais chacun de ces deux plans passe par les milieux des deux arêtes opposées ; leur intersection passe donc par ses deux points ; donc la droite menée par les milieux des deux arêtes opposées passe par le centre de gravité de chacune des tranches parallèles à ces arêtes.

Actuellement, si parmi toutes les tranches on en considère deux quelconques qui soient à distances égales des deux arêtes opposées, leurs solidités seront égales entr'elles. En effet, ces deux tranches ayant même épaisseur, leurs solidités seront entr'elles comme les aires des parallélogrammes qui leur servent de bases ; et les parallélogrammes ayant leurs angles correspondans égaux, leurs aires seront entr'elles comme les produits de leurs côtés contigus ; ainsi les solidités des deux tranches seront entr'elles comme les produits des côtés contigus de leurs parallélogrammes. Or, ces deux produits sont égaux entr'eux : car en nommant M, N, les côtés contigus du parallèlogramme de la première tranche, et M', N', les côtés correspondans de la seconde ; si l'on exprime par A la longueur de la droite qui joint les milieux des arêtes opposées, et par a la partie de cette droite comprise entre chacune de ses extrémités et celle des deux tranches qui en est plus voisine, on aura

$$M : M' :: a : A-a$$
$$N' : N :: a : A-a$$

on aura donc $$M : M' :: N' : N,$$
ce qui donne $$MN = M'N'.$$

Ainsi deux tranches quelconques prises à égales distances des extrémités (ou du milieu de la droite qui joint les milieux des arêtes opposées, sont égales en solidité ; donc, le centre de gravité du système de ces deux tranches est au milieu de la droite qui passe par leurs centres de gravité particuliers ; donc il est au milieu de la droite qui joint les milieux des deux arêtes opposées. Donc le centre de gravité du système de toutes les tranches, c'est-à-dire le centre de gravité de toute la pyramide, est au milieu de cette droite. *C. Q. F. D.*

Le théorème que nous venons de démontrer fournit la cons-

truction la plus simple du centre de gravité de la pyramide triangulaire, et doit être de quelqu'utilité dans les opérations relatives aux déblais et remblais.

C'est aussi ce théorême qui conduit le plus directement à la proposition suivante déjà connue, *la distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan quelconque, est le quart de la somme des distances des sommets des quatre angles au même plan.* Réciproquement, cette dernière proposition supposée connue, fournit une démonstration très-simple du théorême.

J'ajouterai ici quelques détails qui trouveroient difficilement place ailleurs.

Si par chacune des six arêtes d'une pyramide triangulaire quelconque, et par le milieu de l'arête opposée, on mène un plan, on aura six plans, qui passeront par le centre commun de gravité de la pyramide, du parallélipipède circonscrit et de la pyramide conjuguée (1). Chacun de ces plans sera diagonal par rapport au parallélipipède circonscrit, c'est-à-dire passera par deux arêtes parallèles opposées de ce parallélipipède, et ils rempliront la même fonction dans la pyramide conjuguée, c'est-à-dire que chacun d'eux passera par une des arêtes de cette seconde pyramide, et par le milieu de l'arête opposée.

Ces six plans se couperont les uns les autres en sept droites. Parmi ces plans, les trois qui passeront par les arêtes contiguës au sommet d'un même angle de la pyramide ou de la conjuguée, se couperont dans une même droite. Ainsi, la pyramide étant désignée par les lettres A, B, C, D, les trois plans qui passeront par les arêtes AB, AC, AD, se couperont dans une même droite;
il en sera de même des plans menés par les arêtes BC, BD, BA,
de ceux menés par les arêtes CD, CA, CB,
et de ceux menés par les arêtes DA, DB, DC.
Chacune de ces quatre droites passera :

1°. Par le centre commun de gravité du parallélipipède et des deux pyramides conjuguées;

2°. Par le sommet d'un des angles d'une des pyramides;

3°. Par le centre de gravité de la face opposée à cet angle;

4°. Par le sommet opposé de la pyramide conjuguée;

5°. Par le centre de gravité de la face opposée à cet angle, dans la pyramide conjuguée;

6°. Par les centres de gravité des deux faces du noyau qu'elle traverse. Enfin, chacune d'elles sera une des diagonales du parallélipipède circonscrit.

---

(1) Voyez 1er. volume, page 440.

Ceux des six plans qui seront menés par les arêtes opposées de la pyramide se couperont deux à deux dans trois droites, dont chacune passera :

1°. Par le centre commun de gravité du parallélipipède, et des deux pyramides inscrites ;

2°. Par les centres de gravité de deux faces parallèles du parallélipipède, et chacune d'elles sera une des trois diagonales de l'octaèdre, qui est le noyau commun aux deux pyramides conjuguées.

SUR LA SOLIDITÉ DE LA PYRAMIDE.

THÉORÊME I.

En représentant par A, B, C, les longueurs des trois arêtes d'un parallélipipède, contiguës au sommet d'un même angle, et par a, b, c, les angles que forment entr'elles ces trois arêtes considérées deux à deux, on démontre facilement que la solidité du parallélipipède est exprimée par

$$ABC\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a.\cos b.\cos c.}$$

Nous savons d'ailleurs que les trois arêtes A, B, C, du parallélipipède sont respectivement égales aux trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées de la pyramide inscrite, et que les trois angles que forment entr'elles ces trois droites, sont respectivement égaux aux trois angles a, b, c, formés par les arêtes du parallélipipède. Cela donne lieu à la proposition suivante :

THÉORÊME II.

Dans une pyramide triangulaire, si l'on représente par A, B, C, les longueurs des trois droites menées par les milieux des arêtes opposées, et par a, b, c, les angles que forment entr'elles ces trois droites considérées deux à deux, la solidité de la pyramide est exprimée par

$$\tfrac{1}{3}ABC\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a.\cos b.\cos c.}$$

où il faut remarquer que les six quantités A, B, C, a, b, c, sont communes aux deux pyramides conjuguées.

De même, en représentant par A', B', C', les trois distances

des faces parallèles d'un parallélipipède, et par α, β, γ, les angles que font entr'elles les trois faces différentes prises deux à deux; on démontre facilement que la solidité du parallélipipède est exprimée par

$$\frac{A'B'C'}{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}};$$

or, les trois distances A', B', C', sont respectivement égales aux trois plus courtes distances des arêtes opposées de la pyramide inscrite, et les angles que forment entr'elles les droites sur lesquelles se mesurent les plus courtes distances, sont respectivement égaux aux angles α, β, γ, formés par les faces du parallélipipède; en observant que ces trois droites qui ne se rencontrent pas, ne font point entr'elles d'angles proprement dits, mais qu'il s'agit ici des angles que formeroient trois nouvelles droites menées par un même point, et respectivement parallèles aux trois premières; on a donc encore la proposition suivante :

Théorème III.

Dans une pyramide triangulaire, si l'on représente par A', B', C', les longueurs des trois plus courtes distances des arêtes opposées, et par α, β, γ, les angles que formeroient entre elles trois droites menées par un même point respectivement parallèles à ces trois plus courtes distances, la solidité de la pyramide est exprimée par

$$\frac{A'B'C'}{3\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}},$$

où il faut remarquer que les six quantités A', B', C', α, β, γ, sont communes aux deux pyramides conjuguées.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Sur la Transformation des coordonnées(1); *par* M. Hachette.

M. François, ancien élève de l'École Polytechnique, capitaine au Corps du Génie, a donné, dans le 14e. cahier du

(1) J'invite MM. les Élèves à substituer cet article au paragraphe V de notre application de l'Algèbre à la Géométrie, pag. 20.

Journal de l'Ecole (page 182), un mémoire remarquable, et par la notation et par l'élégance des formules; je me suis proposé d'arriver à ces mêmes formules par des considérations géométriques et d'éviter les opérations de calcul.

La notation de M. François consiste à représenter un angle de deux axes, par exemple, de l'axe des x et de l'axe des y, par une parenthèse qui renferme ces deux lettres; ainsi (x, y) signifie, angle de l'axe des x et de l'axe des y; (xy, yz) signifie, angle de deux plans, l'un xy, mené par les axes des x et y, l'autre yz mené par les axes des y et z; enfin (x, yz) est l'angle d'un axe tel que celui des x avec le plan yz.

Cette notation étant adoptée, voici les formules de M. François, pour la transformation des coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées obliques.

x, y, z sont les coordonnées rectangulaires, et x', y', z', les nouvelles coordonnées obliques.

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} x = x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x) \\ y = x' \cos(x', y) + y' \cos(y', y) + z' \cos(z', y) \\ z = x' \cos(x', z) + y' \cos(y', z) + z' \cos(z', z). \end{array} \right.$$

Ces expressions de x, y, z, ont l'avantage de faire voir que l'une quelconque, x par exemple, est composée de trois parties, et que chacune de ces parties est la *projection* d'une des trois nouvelles coordonnées sur l'axe des x. Pour expliquer ce qu'on entend par *projection* d'une droite sur une autre droite, que l'on conçoive une droite menée de l'origine des coordonnées au point dans l'espace que je désigne par (ω); on arrive à ce point, ou par les trois coordonnées rectangulaires x, y, z, ou par les trois coordonnées obliques x', y', z', en sorte que la droite qui va de l'origine des coordonnées au point (ω) est le quatrième côté d'un premier quadrilatère gauche, dont les trois autres sont x, y, z, ou d'un deuxième quadrilatère gauche dont les autres côtés sont x', y', z'; mais l'extrémité de x est effectivement l'intersection de l'axe des x avec un plan mené par le point (ω) parallèlement à celui des yz; c'est ce point d'intersection que je nomme projection de (ω) sur l'axe des x, et la projection d'une droite, sur une autre droite, est la partie de cette seconde droite comprise entre les projections des extrémités de la première; projetant de la même manière, c'est-à-dire parallèlement au plan des yz, les extrémités des x', y', x', la somme des trois projections de ces coordonnées sera égale à la projection de la droite, qui va de l'origine des coordonnées à l'extrémité de z'. Mais la projection de cette droite sur l'axe des x, a pour lon-

gueur x; les projections de x', y', z' ont évidemment pour expressions

$$x' \cos(x', x), \quad y' \cos(y', x), \quad z' \cos(z', x):$$

donc on peut écrire directement les équations (E).

Une observation de M. Binet (répétiteur à l'École Polytechnique), sur la composition des forces, ne m'avoit laissé aucun doute sur la possibilité d'appliquer la même propriété des projections à la transformation des coordonnées obliques en d'autres coordonnées obliques; en effet soient x', y', z' les coordonnées d'un point (ω), x' étant compté sur l'axe des x', y' étant parallèle à l'axe des y', et z' parallèle à l'axe des z', la droite qui va de l'origine des coordonnées au point (ω) est le quatrième côté d'un quadrilatère dont les trois autres côtés sont x', y', z'; si au lieu de x', y', z', on conçoit trois nouvelles coordonnées x'', y'', z'', allant de l'origine des coordonnées au même point (ω), il est évident que la projection du quatrième côté du quadrilatère sur l'un des axes, est égale à la somme des projections des trois autres côtés x', y', z' ou x'', y'', z''; la projection se faisant par des plans parallèles aux deux autres axes; ainsi la projection de la droite qui joint l'origine des coordonnées et le point (ω), sur l'axe des x', a pour longueur x'; elle est égale à la somme des projections des trois droites x', y', z' ou x'', y'', z'' sur le même axe des x', ces projections étant faites comme celle du point (ω), par des plans parallèles au même plan (y' z').

On m'a fait remarquer que la proposition dont je faisois usage pour un quadrilatère, s'appliquoit à un polygone quelconque fermé; en sorte qu'ayant un système quelconque de points, joints deux à deux par des droites, et une droite fixe sur laquelle on projette ces points par des plans parallèles à un seul et même plan, la projection du polygone formé par les droites qui unissent ces points donnés, est égale à la somme des projections des côtés du polygone, en ayant égard aux signes de ces projections; signes qui peuvent être positifs ou négatifs. Ce théorême sur les projections est aussi général que celui dont M. Poisson a fait usage pour démontrer plusieurs théorêmes de dynamique. (Voyez le premier volume *de la Correspondance*, page 387.)

Avant d'aller plus loin, j'observerai sur les équations (E), qu'on a entre les coefficiens de x', y', z', dans ces trois équations, les relations suivantes :

$$(E') \left\{ \begin{array}{l} \cos(x', x)^2 + \cos(x', y)^2 + \cos(x', z)^2 = 1. \\ \cos(y', x)^2 + \cos(y', y)^2 + \cos(y', z)^2 = 1. \\ \cos(z', x)^2 + \cos(z', y)^2 + \cos(z', z)^2 = 1. \end{array} \right.$$

et si l'on passe d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de même espèce, alors les axes des x', des y', des z', sont rectangulaires, et on aura les trois autres relations :

$$\cos(x', x)^2 + \cos(y', x)^2 + \cos(z', x)^2 = 1.$$
$$\cos(x', y)^2 + \cos(y', y)^2 + \cos(z', y)^2 = 1.$$
$$\cos(x', z)^2 + \cos(z', z)^2 + \cos(z', z)^2 = 1.$$

Reprenons les équations de M. François, pour la transformation des coordonnées obliques en d'autres coordonnées obliques ;

$$(F)\begin{cases} x' \sin(x', y'z') = x'' \sin(x'', y'z') + y'' \sin(y'', y'z') \\ \qquad + z'' \sin(z'', y'z') \\ y' \sin(y', x'z') = x'' \sin(x'', x'z') + y'' \sin(y'', x'z') \\ \qquad + z'' \sin(z'', x'z') \\ z' \sin(z', x'y') = x'' \sin(x'', x'y') + y'' \sin(y'', x'y') \\ \qquad + z'' \sin(z'', x'y') ; \end{cases}$$

x', y', z' sont les coordonnées primitives, et x'', y'', z'' les coordonnées nouvelles.

La première des équations (F) fait voir que la valeur de x' est composée de trois parties; savoir :

$$x''\frac{\sin(x'', y'z')}{\sin(x', y'z')}, \quad y''\frac{\sin(y'', y'z')}{\sin(x'', y'z')}, \quad z''\frac{\sin(z'', y'z')}{\sin(x'', y'z')};$$

or, ces trois quantités sont les valeurs des projections de x'', y'', z'', sur l'axe des x', par des plans parallèles au plan des $(y' z')$.

En effet, soient AB et AC (*fig.* 1, *pl.* 1) les axes des y' et des z'; le plan de ces deux droites sera celui des $(y' z')$. Quelles que soient les projections orthogonales des deux axes x' et x'' sur le plan des $(y' z')$, si les angles qu'ils font avec ce plan est constant, *la longueur de la projection d'un x' quelconque sur l'axe (x''), ou d'un x'' quelconque sur l'axe (x'), ne dépendra que de ces angles* (on suppose que la projection de x' ou x'' soit faite par un plan parallèle à celui des $(y' z')$). En effet, l'axe des (x'') étant fixe, qu'on fasse tourner l'axe des (x') de telle manière que son angle avec le plan des $(y' z')$ ne change pas, elle engendrera une surface conique droite, dont la base circulaire sera parallèle au plan des $(y' z')$; si par l'extrémité d'un x'' quelconque, on mène un plan parallèle à ce dernier plan, il coupera la surface conique droite suivant un cercle, et chacune des arêtes du cône comprise entre ce cercle et l'origine des coordonnées qui est le sommet du cône, sera une projection de x'' sur l'axe des (x') : or, toutes ces arêtes sont égales ; donc

toutes les projections de x'' sur l'axe des (x') seront de même longueur; on prouve de la même manière que toutes les projections des x' sur l'axe des x'' sont de même longueur; on peut donc supposer les axes des (x') et des (x'') dans un même plan AD, perpendiculaire à celui des $(y' z')$. EAD et FAD sont les angles du plan $(y' z')$ avec les axes des (x') et des (x''); le point E étant l'extrémité d'un x'' quelconque, il est évident qu'en menant EF parallèle à AD, AF sera la projection de $AF = x''$, sur l'axe AF des (x'); or, dans le triangle EFA, on a :

$$\sin EFA : AE :: AEF : AF,$$

ou

$$\sin (x', y' z') : x'' :: \sin (x'', y' z') : AF,$$

donc

$$AF = x'' \frac{\sin (x'', y' z')}{\sin (x', y' z')};$$

et par la même raison

$$y'' \frac{\sin (y'', y' z')}{\sin (x'', y' z')} \quad \text{et} \quad z'' \frac{\sin (z'', y' z')}{\sin (x', y' z')}$$

sont les projections de y'' et z'' faites sur le même axe des (x') par des plans parallèles à $(y' z')$; donc en égalant la somme de ces trois projections à x', on aura la première des équations (E); on obtiendroit de même les deux autres par les valeurs de y' et de z'.

Il est à remarquer que le nombre des constantes qui entrent dans les équations (F), ne peut pas être réduit; car il faut au moins trois quantités pour déterminer la pyramide triangulaire formée par les axes des (x'), des (y') et des (z'); il en faut au moins deux pour déterminer la position de chacun des axes des (x''), (y''), (z''), par rapport à l'un quelconque des axes primitifs; les constantes nécessaires sont donc au nombre de neuf, comme on les voit dans les équations (F). Mais si l'on supposoit les axes des (x''), (y''), (x''), perpendiculaires entr'eux, en nommant α, β, γ les angles d'une droite perpendiculaire au plan des $(y' z')$ avec ces axes, on auroit :

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1;$$

donc,

$$\sin (x'', y' z')^2 + \sin (y'', y' z')^2 + \sin (z'', y' z')^2 = 1;$$

et par la même raison,

$$\sin (x'', x' z')^2 + \sin (y'', x' z')^2 + \sin (z'', x' z')^2 = 1.$$
$$\sin (x'', x' y')^2 + \sin (y'', x' y')^2 + \sin (z'', x' y')^2 = 1.$$

En combinant ces trois équations de conditions avec les équations (F), on pourra transformer les coordonnées obliques x', y', z', en coordonnées rectangulaires x'', y'', z''; ces valeurs de x', y', z', doivent coïncider, dans ce cas, avec celles qu'on déduiroit des équations (E), en prenant ces valeurs de x', y', z', en fonctions de x, y, z.

Enfin, s'il s'agissoit de transformer des coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires, les neuf constantes des équations (F) réduites à six par les trois dernières équations de conditions, se réduiroient à trois; car on auroit de plus :

$$\sin (x'', y' z')^2 + \sin (x'', x' z')^2 + \sin (x'', x' y')^2 = 1$$
$$\sin (y'', y' z')^3 + \sin (y'', x' z')^2 + \sin (y'', x' y')^2 = 1$$
$$\sin (z'', y' z')^2 + \sin (z'', x' z')^2 + \sin (z'', x' y')^2 = 1$$

d'où l'on voit que, par les équations (F), on peut opérer les trois transformations de rectangulaires en rectangulaires, de rectangulaires en obliques, ou d'obliques en rectangulaires, et enfin d'obliques en obliques.

Les équations (E) et (E') donnent le moyen de transformer un systême de coordonnées rectangulaires en un autre systême de même espèce; mais elles supposent que les angles des axes primitifs, avec les nouveaux, soient connus : or ces angles ne sont pas toujours donnés directement; et la mécanique en offre des exemples. Il faut alors calculer les valeurs des lignes trigonométriques de ces angles, en fonction des quantités connues. *Ex.* : x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires primitives, et x', y', z', les coordonnés nouvelles du même point, on donne : 1°. l'angle θ du plan ($x' y'$) avec le plan ($x y$); 2°. l'angle ψ, de l'intersection de ces deux plans et de l'axe des (x); 3°. de l'angle φ de cette même intersection et de l'axe des (x').

Il s'agit maintenant de trouver les coefficiens qui entrent dans les équations (E) en fonction de θ, ψ et φ.

Cherchons d'abord les cosinus

$$\cos. (x', x), \cos. (x', y), \cos. (x', z).$$

Remarquons qu'en nommant (I) la droite intersection des deux plans ($x y$) et ($x' y'$), l'axe des (x) et (x'), et la droite (I) forment un triangle sphérique dont on connoît deux faces et l'angle compris; l'angle de l'axe (x) et de I est ψ; l'angle de I et de l'axe des (x') est φ; l'angle des deux côtés ψ et φ, est θ; donc par la formule (page 275 du premier volume de cette Correspondance), qui donne un côté, au moyen de deux autres côtés,

et de l'angle qu'ils font entr'eux, on aura :

$$\cos(x, x') = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \cos\theta.$$

L'axe des (y), l'axe des (x') et la droite (I) forment un second triangle sphérique, qui ne diffère du premier que par le côté (ψ), qui devient $\psi + 90^\circ$, ce qui change $\sin\psi$ en $\cos\psi$ et $\cos\psi$ en $-\sin\psi$; donc on aura

$$\cos(y, x') = -\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta.$$

L'axe des (z), l'axe des (x'), et la droite (I) forment un triangle sphérique qui diffère du premier, et par le côté qui devient 90°, parce que l'axe (z) est perpendiculaire à la droite (I), et par l'angle θ qui devient $(90^\circ - \theta)$, parce que le plan (Ix') fait avec le plan (Iz) un angle complément de θ, donc $\sin\psi = 1$, $\cos\psi = 0$, $\cos\theta$ devient $-\sin\theta$, et on a

$$\cos(z, x') = -\sin\varphi \sin\theta.$$

Par des considérations semblables, on trouve les valeurs de

$$\cos(x, y'), \cos(y, y'), \cos(z, y').$$

La droite (I) forme avec les deux axes (x) et (y'), et avec les deux axes (y) et (y') deux triangles sphériques dont on connoît deux faces et l'angle compris (θ).

La droite (I) et les deux axes des (z) et (y') forment un triangle sphérique dont un côté est $90^\circ + \varphi$, l'autre côté est 90°, et l'angle compris entre ces deux côtés est $90^\circ - \theta$; ce qui donne

$$\cos(x, y') = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi.$$
$$\cos(y, y') = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi.$$
$$\cos(z, y') = -\sin\theta \cos\varphi.$$

Enfin les deux triangles sphériques, formés par la droite (I), et les deux axes des (x) et (z'), et par la même droite (I), avec les deux axes des (y) et (z'), donnent

$$\cos(x, z') = \sin\theta \sin\psi.$$
$$\cos(y, z') = \sin\theta \cos\psi.$$

Et d'ailleurs, il est évident que les plans (xy) et $(x'y')$ font entr'eux le même angle que les axes (z) et (z'); donc $\cos(z, z') = \cos\theta$.

C'est d'après cette méthode que M. Poisson a donné, dans ses



leçons au collége de France, les formules de la mécanique céleste, tome premier, page 58.

Je terminerai cet article en proposant à MM. les Elèves un problême sur la pyramide triangulaire. On n'a considéré jusqu'à présent, dans une pyramide triangulaire, que six angles : les angles des arêtes, et les angles des plans contenant ces arêtes. La trigonométrie sphérique a pour objet de déterminer trois de ces angles, au moyen des trois autres ; mais les arêtes font, avec les plans opposés aux arêtes, trois autres angles ; en sorte qu'il y a réellement neuf angles à considérer dans une pyramide triangulaire.

En nommant *arêtes* d'un triangle sphérique, les droites qui vont du centre de la sphère à l'extrémité de ses côtés, on trouvera facilement la démonstration de cette proposition, (que je n'ai pas encore vue énoncée) : « Les sinus des angles » que les arêtes et les plans des côtés d'un triangle sphé- » rique font entr'eux, sont en raison inverse des sinus des côtés » opposés à ces arêtes. »

Problême de Géométrie.

Connoissant, dans une pyramide triangulaire, les angles des arêtes avec les plans des faces de la pyramide opposées aux arêtes, construire la pyramide.

Application de la théorie des Ombres au dessin des Machines ; par M. Hachette.

Les filets d'une vis triangulaire sont terminés par deux surfaces qui ont pour génératrices la ligne droite ; on les suppose éclairés par des rayons de lumières parallèles entr'eux, et on propose de construire la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur chacune des surfaces des filets.

La solution de ce problême dépend d'une proposition que j'ai publiée en supplément aux Leçons de Géométrie descriptive que M. Monge a données aux écoles normales en 1795, et que j'ai fait imprimer en 1799, pour l'usage de l'Ecole Polytechnique. Voici l'énoncé de cette proposition :

Une surface courbe quelconque, engendrée par une ligne droite mobile, quellesque soient d'ailleurs les directrices de cette droite, peut être touchée suivant la génératrice considérée dans

et de l'angle qu'ils font entr'eux, on aura :

$$\cos(x, x') = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \cos\theta.$$

L'axe des (y), l'axe des (x') et la droite (I) forment un second triangle sphérique, qui ne diffère du premier que par le côté (ψ), qui devient $\psi + 90^\circ$, ce qui change $\sin\psi$ en $\cos\psi$ et $\cos\psi$ en $-\sin\psi$; donc on aura

$$\cos(y, x') = -\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta.$$

L'axe des (z), l'axe des (x'), et la droite (I) forment un triangle sphérique qui diffère du premier, et par le côté qui devient 90°, parce que l'axe (z) est perpendiculaire à la droite (I), et par l'angle θ qui devient ($90^\circ - \theta$), parce que le plan (Ix') fait avec le plan (Iz) un angle complément de θ, donc $\sin\psi = 1$, $\cos\psi = 0$, $\cos\theta$ devient $-\sin\theta$, et on a

$$\cos(z, x') = -\sin\varphi \sin\theta.$$

Par des considérations semblables, on trouve les valeurs de

$$\cos(x, y'), \cos(y, y'), \cos(z, y').$$

La droite (I) forme avec les deux axes (x) et (y'), et avec les deux axes (y) et (y') deux triangles sphériques dont on connoît deux faces et l'angle compris (θ).

La droite (I) et les deux axes des (z) et (y') forment un triangle sphérique dont un côté est $90^\circ + \varphi$, l'autre côté est 90°, et l'angle compris entre ces deux côtés est $90^\circ - \theta$; ce qui donne

$$\cos(x, y') = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi.$$
$$\cos(y, y') = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi.$$
$$\cos(z, y') = -\sin\theta \cos\varphi.$$

Enfin les deux triangles sphériques, formés par la droite (I), et les deux axes des (x) et (z'), et par la même droite (I), avec les deux axes des (y) et (z'), donnent

$$\cos(x, z') = \sin\theta \sin\psi.$$
$$\cos(y, z') = \sin\theta \cos\psi.$$

Et d'ailleurs, il est évident que les plans (xy) et ($x'y'$) font entr'eux le même angle que les axes (z) et (z'); donc $\cos(z, z') = \cos\theta$.

C'est d'après cette méthode que M. Poisson a donné, dans ses

leçons au collége de France, les formules de la mécanique céleste, tome premier, page 58.

Je terminerai cet article en proposant à MM. les Elèves un problême sur la pyramide triangulaire. On n'a considéré jusqu'à présent, dans une pyramide triangulaire, que six angles : les angles des arêtes, et les angles des plans contenant ces arêtes. La trigonométrie sphérique a pour objet de déterminer trois de ces angles, au moyen des trois autres ; mais les arêtes font, avec les plans opposés aux arêtes, trois autres angles ; en sorte qu'il y a réellement neuf angles à considérer dans une pyramide triangulaire.

En nommant *arêtes* d'un triangle sphérique, les droites qui vont du centre de la sphère à l'extrémité de ses côtés, on trouvera facilement la démonstration de cette proposition, (que je n'ai pas encore vue énoncée) : « Les sinus des angles » que les arêtes et les plans des côtés d'un triangle sphé- » rique font entr'eux, sont en raison inverse des sinus des côtés » opposés à ces arêtes. »

Problême de Géométrie.

Connoissant, dans une pyramide triangulaire, les angles des arêtes avec les plans des faces de la pyramide opposées aux arêtes, construire la pyramide.

Application de la théorie des Ombres au dessin des Machines ; par M. Hachette.

Les filets d'une vis triangulaire sont terminés par deux surfaces qui ont pour génératrices la ligne droite ; on les suppose éclairés par des rayons de lumières parallèles entr'eux, et on propose de construire la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur chacune des surfaces des filets.

La solution de ce problême dépend d'une proposition que j'ai publiée en supplément aux Leçons de Géométrie descriptive que M. Monge a données aux écoles normales en 1795, et que j'ai fait imprimer en 1799, pour l'usage de l'Ecole Polytechnique. Voici l'énoncé de cette proposition :

Une surface courbe quelconque, engendrée par une ligne droite mobile, quellesque soient d'ailleurs les directrices de cette droite, peut être touchée suivant la génératrice considérée dans

une position quelconque, par une autre surface qui a aussi pour génératrice une ligne droite, et pour directrices trois autres lignes droites; cette dernière surface, que nous nommons *surface gauche du second degré*, est l'hyperboloïde à une nappe, que nous avons fait connoître dans notre application de l'Algèbre à la Géométrie (page 32). Dans ce même ouvrage (page 50), j'ai donné une démonstration analytique de la proposition qu'on vient d'énoncer, et qui est importante par les nombreuses applications qu'on en fait dans les arts graphiques.

Il résulte de cette proposition que, lorsque deux surfaces *réglées*, c'est-à-dire sur lesquelles on peut appliquer l'arête d'une règle dans le sens de la génératrice, ont trois plans tangens communs suivant la même génératrice, elles sont tangentes l'une à l'autre, de telle manière que le plan tangent à l'une suivant la génératrice qui leur est commune, est aussi tangent à l'autre. J'ai fait voir dans mon *Cours de Coupe des Pierres*, comment on pouvoit, d'après cette conséquence, *raccorder* les deux surfaces *réglées* de L'ARRIÈRE VOUSSURE de MARSEILLE.

Nous allons faire une autre application de ce théorême, pour déterminer sur la surface d'une vis à filets triangulaires, la ligne de séparation d'ombre et de lumière, dans l'hypothèse où les rayons de lumière sont parallèles entr'eux. J'ai fait construire cette courbe par M. Girard; la planche ci-jointe est exécutée d'après son dessin.

La droite mobile qui engendre la surface du filet d'une vis triangulaire, passe constamment par l'axe d'un cylindre droit à basse circulaire; elle fait avec cet axe un angle constant, et s'appuie sur une hélice tracée sur le cylindre droit; tous les points de la droite mobile décrivent des hélices tracées sur des cylindres droits qui ont un axe commun et dont les rayons vont en décroissant jusqu'à cet axe, qui est lui-même une des hélices; or, les tangentes à ces helices menées de tous les points d'une même génératrice, appartiennent évidemment à une surface réglée, qui touche la surface du filet suivant la droite qui leur est commune; deux quelconques de ces tangentes, et l'axe, sont les directrices de la droite qui engendre la surface tangente au filet; de plus, toutes les tangentes aux hélices sont parallèles à un même plan; donc la surface tangente au filet est un *paraboloïde hyperbolique*. (Voyez page 45 de notre application d'*Algèbre à la Géométrie.*)

Si on conçoit pour chaque position de la génératrice de la surface du filet, la paraboloïde tangent à cette surface, le plan mené par la génératrice parallèlement au rayon de lumière,

touchera le paraboloïde et la surface du filet au même point; donc, le point du contact sur le paraboloïde sera un des points de la ligne de séparation d'ombre et de lumière; mais on a vu que le paraboloïde est engendré par une droite mobile qui s'appuie sur l'axe de la vis et sur les tangentes à deux hélices; considérant cette droite mobile dans deux positions différentes, elle sera coupée par le plan parallèle au rayon de lumière en deux points; la droite qui joint ces deux points rencontrera la génératrice commune à la surface du filet et au paraboloïde, en un point qui appartiendra à la séparation d'ombre et de lumière: on en trouveroit de même tous les autres points, mais ce moyen quoique simple en théorie n'est pas d'une exécution facile, et dans la pratique on préférera la construction que nous allons indiquer.

Tous les paraboloïdes tangens à la surface du filet sont égaux entr'eux; si on les coupe par des plans perpendiculaires à l'axe de la vis, et équidistans des points où les génératrices du filet rencontrent à cet axe, toutes ces sections sont égales; chacune de ces sections est une parabole. Projetant sur le plan de la parabole la portion de la génératrice du filet, comprise entre l'axe et ce plan de la parabole, la perpendiculaire elevée sur le milieu de cette projection sera la direction du grand axe de la parabole. (Fig. 1, planch. 2) AB et CD étant les projections de la génératrice, XY le plan de la parabole, le sommet P de la parabole est sur une droite MP, perpendiculaire sur le milieu M de AB; on construit ce point en menant par le point (M, m) la tangente à l'hélice tracée sur le cylindre, qui a pour base le cercle du rayon BM; l'hélice décrite par le point A de la génératrice du filet, donne le rapport de l'arc de rotation de ce point sur le cercle du rayon AB, à la hauteur dont il s'élève pendant qu'il décrit cet arc. Si on nomme a ce rapport, et b la distance DE du point où la génératrice du filet coupe l'axe de la vis au plan XY, $\frac{ab}{4}$ sera l'expression de la soutangente MP.

Le paraboloïde tangent au filet de la vis, suivant la droite (AB, CD), étant coupé par le plan XY, suivant une parabole APB, un autre plan $X'Y'$ parallèle à XY, et placé à même distance du point D, coupe le paraboloïde, suivant la même parabole APB; faisant mouvoir cette parabole en même temps que la génératrice du filet de la vis, on construira facilement la courbe de séparation d'ombre et de lumière.

Supposons le rayon de lumière (L, L') fig. 2, parallèle au plan vertical de projection, et soient AB et DC la génératrice

de la surface du filet; il est évident que le point (A, D) appartient à la courbe cherchée; car le plan vertical AB est parallèle au rayon de lumière, et il touche la surface du filet au point (A, D); menant par ce point une parallèle au rayon de lumière qui coupe le plan XY au point (Y', Y), et par le point Y' une droite quelconque $Y'R$, les droites (AR, $R'r$) seront les deux projections de la génératrice, et APR la parabole correspondante à cette position de la génératrice; or, la droite $Y'R$ coupe cette parabole au point Q; donc le plan parallèle au rayon de lumière coupe le paraboloïde tangent, suivant la droite QM, perpendiculaire à AR, donc le point (M en projection horizontale, et m en projection verticale) appartient à la courbe cherchée. La génératrice continuant à tourner dans le sens $BR.T$, arrive dans une position AT, telle que la parabole ATP, qui lui correspond, soit touchée par la droite $Y'T$; alors le point T est évidemment un point de la courbe; on construit ce point, en observant que la droite $Y'T$ est le troisième côté d'un triangle dont on a le côté AY', le côté AT, et l'angle ATY' que fait la tangente de la parabole au point donné T avec son ordonnée AT. T' est la projection verticale du point de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, dont T est la projection horizontale. La génératrice partant de la position AT, arrive dans la position AS, telle que SY' est perpendiculaire à AS, et par conséquent parallèle à l'axe de la parabole correspondante à cette nouvelle position de la génératrice; la droite SY' ne pourra donc couper la parallèle qu'en un point infiniment éloigné, ainsi la grandeur des rayons vecteurs AM, AT, etc., croissante de B en T, devient infinie suivant le rayon AS. La branche de courbe dont TMA est la projection horizontale, est $T'mD$ en projection verticale. Pour continuer cette branche, il faut supposer que la génératrice qui a déjà parcouru l'arc TB, continue à se mouvoir dans le même sens TBs; As étant perpendiculaire à $Y's$, le rayon vecteur du point de la courbe sur cette droite Ass' sera infini, et on trouve sur le prolongement de la surface de la vis la portion de courbe Ao, pour le prolongement de la portion TMA, et la branche entière a pour projection verticale $T'mDo'$. La courbe de séparation d'ombre et de lumière a une seconde branche dont on trouve les points, en faisant toujours mouvoir la génératrice dans le même sens $TBstfB'$. Lorsque la génératrice a pour projection At, la droite tY' est tangente à la parabole qui correspond à cette position, et le point t est un point de la courbe.

De la position At, on arrive à la position AB', et le point A est commun et à la première branche et à la seconde;

mais il a deux projections verticales D et a. Enfin, allant de B' en S, en parcourant l'arc $B' o S$, on trouve sur le prolongement de la surface de la vis la portion de courbe Af, dont le rayon recteur suivant le prolongement de la droite $A S S'$ est infini; la seconde branche de la ligne cherchée a donc pour projection horizontale la courbe à nœud $t A f$, et pour projection verticale $t' a f'$.

Pour ne pas être obligé de répéter la construction de la parabole contenue dans le plan XY ou $x' y'$, on peut, comme l'a fait M. Girard, découper le papier suivant le contour de cette parabole, et transporter ce patron sur toutes les positions de la génératrice.

Conclusion.

La ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un des filets de la surface de la vis, est formée de deux branches infinies; deux portions de cette ligne $A T$, $A t$, existent sur la partie réelle de la surface, et les deux autres portions Af, $A o$, appartiennent au prolongement de cette surface.

Dans le dessin de la vis triangulaire, il faut avoir égard aux deux surfaces supérieure et inférieure du filet, et les deux branches qu'on vient de construire serviront pour l'une ou pour l'autre surface; la surface supérieure portera ombre sur le plan horizontal, et la surface inférieure portera ombre sur les filets mêmes de la vis. (*Voyez* une autre solution de ce problême, pag. 69 de ce volume, 2e. cahier, et pag. 447, 5e. cahier.)

Géométrie Analitique.

Des trois axes rectangulaires des surfaces du second degré, qui ont un centre; par M. Binet.

Lorsque j'ai publié, en 1801, le Mémoire *sur les surfaces du second degré*, je m'étois proposé de prouver qu'en rapportant la surface du second degré à trois plans rectangulaires, l'équation générale de cette surface pouvoit toujours être ramenée à la forme

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0.$$

La note placée à la suite de ce Mémoire renferme une démonstration rigoureuse de cette proposition; elle prouve qu'on peut toujours faire disparoître de l'équation générale des surfaces du second degré les trois rectangles xy, yz, xz. M. Binet (J.-P.-M.) a observé que lorsque les surfaces du second degré avoient un centre, le calcul de la note qu'on vient de citer, pou-

voit être simplifié par la considération suivante: « Ayant un système de droites parallèles entr'elles, qui servent de cordes à la surface du second degré, il existe un plan perpendiculaire à ces cordes, qui les divise toutes en parties égales, et ce plan est évidemment un des plans rectangulaires de la surface. »

Prenons pour l'équation générale des surfaces du second degré :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz \\ \qquad\qquad + gx + dy + kz + 1 \end{array} \right\} = 0.$$

et soient

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha z + \beta. \\ y = \alpha' z + \beta'. \end{array} \right.$$

les équations d'une droite qui coupe la surface du second degré en deux points; on obtiendra les coordonnées de ce point, en combinant ces équations avec l'équation générale (1), et faisant pour abréger

$$a\alpha^2 + b\alpha'^2 + d\alpha\alpha' + e\alpha' + f\alpha + c = A.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a\alpha\beta + 2b\alpha'\beta' + d(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + e\beta' + f\beta + g\alpha \\ \qquad\qquad + h\alpha' + k \end{array} \right\} = B.$$

$$a\beta^2 + b\beta'^2 + d\beta\beta' + g\beta + h\beta' + 1 = C.$$

L'ordonnée Z du point d'intersection sera donnée par l'équation $Az^2 + Bz + C = 0$; les deux valeurs de z, tirées de cette équation, sont :

$$-\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - C} \quad \text{pour la première,}$$

$$\text{et } -\frac{B}{2A} - \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - C} \quad \text{pour la deuxième;}$$

Donc l'ordonnée Z' du milieu de la droite qui joint les deux points d'intersection, est $-\frac{B}{2A}$.

Nommant X', Y', les deux autres coordonnées du même point, on aura par les équations (2)

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} X' = \alpha Z' + \beta \\ Y' = \alpha' Z' + \beta' \\ Z' = -\dfrac{B}{2A} \end{array} \right.$$

regardant X', Y' Z' comme des coordonnées variables, dont la valeur dépend des quantités β et β', si, entre ces trois équa-

tions, on élimine ces dernières quantités $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, l'équation résultante en X', Y', Z', qu'on peut désigner par les trois lettres x, y, z, appartiendra à la surface qui passe par les centres de toutes les cordes parallèles à la droite des équations (2).

Les équations (3) donnent :

$$\mathcal{C} = x - \alpha z.$$
$$\mathcal{C}' = y - \alpha' z.$$
$$\left.\begin{array}{l} -2Az = \mathcal{C}(2a\alpha + d\alpha' + f) + \mathcal{C}'(2b\alpha' + d\alpha + e). \\ \quad + g\alpha + h\alpha' + k. \end{array}\right\}$$

substituant pour $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et A leurs valeurs, on a,

$$\left\{\begin{array}{l} (x - \alpha z)(2a\alpha + d\alpha' + f) + (y - \alpha' z)(2b\alpha' + d\alpha + e) \\ + z(2a\alpha^2 + 2b\alpha'^2 + 2d\alpha\alpha' + 2e\alpha' + 2f\alpha + 2c) \\ + g\alpha + h\alpha' + k = 0. \end{array}\right\}$$

réduisant

$$(4) \left.\begin{array}{l} x(2a\alpha + d\alpha' + f) + y(2b\mathcal{C}' + d\alpha + e) + z(e\alpha' + f\alpha + 2c) \\ + g\alpha + h\alpha' + k \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation linéaire est celle d'un plan diamétral qui passe par les milieux de toutes les cordes parallèles à la droite des équations (2).

Pour que ce plan soit perpendiculaire aux cordes, il faut qu'il soit parallèle au plan dont l'équation est :

$$\alpha x + \alpha' y + z = 0.$$

Donc on aura les équations de condition.

$$(5)\ \alpha = \frac{2a\alpha + d\alpha' + f}{e\alpha' + f\alpha + 2c}, \quad \alpha' = \frac{2b\alpha' + d\alpha + e}{e\alpha' + f\alpha + 2c}$$

ces équations (5) sont linéaires, l'une par rapport à α', et l'autre par rapport à α; éliminant l'une ou l'autre, α' par exemple, on aura :

$$\alpha' = \frac{f + 2\alpha(a - c) - f\alpha^2}{e\alpha - d.}$$

$$e\alpha'^2 + \alpha'(f\alpha + 2c - 2b) - (d\alpha + c) = 0.$$

mettant dans cette dernière équation pour α', sa valeur, et observant que le terme du 4e degré $ef^2\alpha^4$ se détruit, l'équation réduite en α, est du 3e degré; ce qui prouve que la surface du second degré ne peut avoir que trois axes rectangulaires ; on tire

de cette équation, au moins une racine réelle de α; à cette valeur réelle de α correspond une autre valeur réelle de α', donnée par la première des équations (5). Substituant ces valeurs réelles de α et α' dans l'équation (4), on a l'équation d'un plan diamétral perpendiculaire à toutes les cordes parallèles à la droite des équations (2); la surface du second degré étant rapportée à ce plan diamétral, comme l'un des plans coordonnés, son équation sera évidemment de la forme :

$$a' x^2 + b' y^2 + c' z^2 + d' xy + g' x + h' y + 1 = 0.$$

Changeant les coordonnées rectangulaires x, y en d'autres coordonnées rectangulaires x', y', par les formules connues $x = x' \sin\varphi - y' \cos\varphi$, $y = x \cos\varphi + y' \sin\varphi$, on trouve $\text{tang}(2\varphi) = \frac{d'}{a' - b'}$, valeur réelle d'après laquelle les axes des (x') et des (y') deviennent les axes rectangulaires de la surface du deuxième degré, conjugués à l'axe déterminé par la racine réelle de α, qui est donnée nécessairement par l'équation du troisième degré en α.

Enfin, on sait qu'en changeant l'origine des coordonnées, on peut faire disparoître les termes de première dimension par rapport aux variables; donc l'équation générale des surfaces du second degré qui ont un centre, sera réduite à la forme

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0,$$

x, y, z étant des coordonnées rectangulaires.

H. C.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE;

Par M. BADUEL, *ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, Ingénieur des Ponts et Chaussées.*

Étant donné un triangle quelconque, abc (fig. 2, pl. 1), déterminer quelle doit être l'inclinaison de son plan et la position de ses côtés, pour que sa projection sur un plan horizontal soit un triangle équilatéral ?

Quel que soit le triangle donné (a), s'il n'est pas équilatéral, il aura au moins un angle au-dessous de 60 degrés : soit a (fig. 2) cet angle. Je prends pour intersection du plan du triangle avec le plan de projection, la ligne yz (fig. 2.), et sur la partie mn de cette ligne, je décris un arc capable de l'angle a. Le sommet

de l'angle a rabattu, tombant sur la circonférence $m, a\, a'\, n$, ce même sommet projeté devra se trouver sur la circonférence $m\ a''\ n$, dont l'arc $m\ p\ n$ est capable de l'angle de 60 degrés.

Si le problême étoit résolu, et que, du sommet du triangle rabattu, on menât une ligne sur le milieu de sa base, cette ligne prolongée couperoit l'arc $m\ n\ q$ au point q, qu'il est fort aisé de déterminer, puisque ce point est le même pour toutes les positions du triangle : la projection de cette ligne dans le triangle équilatéral, seroit perpendiculaire sur le milieu de la base, partageroit l'angle de 60 degrés en deux parties égales, et passeroit, par conséquent, par le point p, milieu de l'arc $m\ p\ n$. La ligne et sa projection devroient se croiser sur la ligne $y\ z$.

Le problême se trouve donc réduit à celui-ci : trouver sur la ligne $y\ z$, un point x, tel que les lignes menées par les points q, p, après s'y être croisées, aboutissent aux circonférences d'où elles sont parties, en deux points qui soient sur une même perpendiculaire à $y\ z$.

Ce nouveau problême a évidemment deux solutions. Je le suppose résolu (*fig.* 3) : soient x et x', les deux points cherchés sur la ligne $y\ z$; $q\ a'$ et $p\ a''$ seront la ligne cherchée et sa projection, ainsi que $q\ \alpha'$ et $p\ \alpha$. Les points p, q, a'', a', sont sur une même circonférence, puisque les lignes $q\ a'$, $p\ a''$ se coupent en parties réciproquement proportionnelles : il en est de même des quatre points, p, q, α', α; les triangles $p\ q\ x$, $a'\ x\ a''$ sont semblables, ainsi que les triangles $p\ q\ x'$, $\alpha\ x'\ \alpha'$. Toute circonférence $p\ q\ i\ h\ f\ g$, passant par les points p et q, coupera la ligne $q\ a'$, $p\ a''$, en deux points h, i, qui seront sur une même perpendiculaire à $y\ z$, puisque le triangle $x\ i\ h$ est semblable à $x\ p\ q$, et par conséquent à $x\ a'\ a''$; par la même raison, les points f, g, seront aussi sur une même perpendiculaire à $y\ z$. La ligne $k\ l$, qui joint les milieux des cordes parallèles $h\ i$, $f\ g$, leur sera perpendiculaire, sera parallèle à $y\ z$, et sera un diamètre du cercle.

Ce que je viens de dire de la circonférence $f\ g\ p\ q\ h\ i$, ayant lieu pour toute autre circonférence passant par les points p, q, il s'ensuit que celle qui passe par le point x, ne coupant les lignes $q\ a'$, $p\ a''$ qu'au point commun x, a un diamètre, et par conséquent son centre sur la ligne $y\ z$, et passe aussi par le point x'. Les points x, x' sont donc donnés par l'intersection de la ligne $y\ z$, et de la circonférence qui, passant par les points p et q, a son centre sur la ligne $y\ z$. Les cordes $h\ i$, $f\ g$ sont égales, puisque l'angle $q\ p\ x = q\ x'\ x = q\ g\ i$.

Le point x étant déterminé, on menera (*fig.* 2) les lignes $q\,a'\,p\,a''$; on construira le triangle $a\,b\,c$, en mettant le sommet au point a', et on projettera les points b', c' en b'', c''; on trouvera l'inclinaison du plan par le moyen ordinaire.

Si le triangle donné avoit deux angles au-dessous de 60 degrés, quel que fût celui dont on se servît pour résoudre le problême, on obtiendroit le même triangle équilatéral, la même inclinaison du plan, et une position analogue des côtés; de sorte que les quatre solutions que paroît présenter ce problême, se réduisent réellement à une seule. Je les ai indiquées dans la *fig.* 3 (*b*) où la ligne $a\,a$ est perpendiculaire à $y\,z$.

Question *de Minimis*;

Par MM. Billy *et* Puissant, *Professeurs à l'Ecole Militaire de Saint-Cyr.*

Deux points mobiles parcourent d'un mouvement uniforme les droites (*fig.* 4) MM', mm', données d'une manière quelconque dans l'espace; M et m sont les points de départ. Ils s'avancent vers X, et il s'agit de trouver la position des deux points sur les droites données, lorsque la distance de ces point est un *minimum*.

Après avoir mené par un point quelconque G de la route MM', une droite GF parallèle à $m\,m'$, telle que MG et GF soient dans le rapport des vîtesses des points M et m, la perpendiculaire mR abaissée du point m sur MF prolongée, déterminent le point R, par lequel, si on mène la parallèle $R\,M'$ à $m\,m'$, et la parallèle $M'\,m'$ à $R\,m$, $M'\,m'$ est la distance demandée, et M', m', sont les positions des points mobiles correspondans à cette distance.

La géométrie et l'analyse conduisent également à cette construction.

Des Épicycloïdes sphériques (Pl. 3);

Par M. Hachette.

M. Camus a donné, vers 1760, un Mémoire sur les engrenages, qui se trouve dans son *Traité de Statique, à l'usage des ingénieurs*. La première partie de ce Mémoire, traite des engrenages plans et cylindriques qui, en général, présen-

tent peu de difficultés; la seconde partie est relative aux roues d'angle. L'objet de ces roues est de transformer un mouvement continu de rotation autour d'un axe, en un autre mouvement de rotation autour d'un autre axe, qui fait avec le premier un angle donné. On peut résoudre ce problême ou par deux roues d'angles, ou par une de ces roues, et une lanterne à fuseaux coniques; les dents de cette espèce de roues sont terminées par des surfaces coniques qui ont pour bases des épicycloïdes sphériques. J'ai ajouté au mémoire de Camus, la construction géométrique de la tangente à l'épicycloïde sphérique, et l'application des méthodes de la géométrie descriptive au tracé des roues d'angles et des roues qui mènent des lanternes à fuseaux coniques (Voyez le *Traité des Machines*, chap. 2, pag. 161). La théorie des engrenages coniques, que j'ai exposée dans ce traité, a pour base les propriétés des courbes qu'on nomme *épicycloïdes*.

De l'Epicycloïde plane.

Lorsque deux cercles qui se touchent sont dans un même plan, et que l'un des deux roule sur l'autre, un point quelconque du cercle mobile décrit une courbe qu'on nomme *épicycloïde plane*; si le cercle mobile a pour diamètre un rayon du cercle fixe, l'épicycloïde devient une ligne droite, et cette droite est le rayon même du cercle fixe. En effet, soit AD (planch. 3. fig. 1.) le rayon du cercle fixe; le cercle mobile qui touche le cercle fixe d'abord au point D, le touche ensuite en un point quelconque B; donc si l'arc BC, sur le cercle mobile, est égal en longueur à l'arc BD sur le cercle fixe, le point C sera un des points de l'épicycloïde décrit par le point D; or les deux arcs BD et BC ne peuvent être égaux en longueur que lorsque le point C sera sur le rayon AD; car la moitié de l'arc BC, qui est d'un nombre de degrés double de celui de l'arc BD, mesure, ainsi que ce dernier arc entier, l'angle BAD; donc les trois points A, C, D sont en ligne droite.

Fig. 2. $VMTX$ étant l'épicycloïde plane décrite par un point du cercle mobile BMD, il sera facile de trouver la tangente à cette courbe en un point quelconque M. En effet, la position du cercle mobile qui correspond au point M étant connue, ce cercle touche le cercle fixe en un point B; or le point M tend à décrire un cercle dont le point de contact B est le centre; donc, la droite BM est une normale à l'épicycloïde; d'où il suit qu'après avoir déterminé la position du

cercle mobile qui correspond au point quelconque M d'une épicycloïde, la tangente MD en ce point, passe toujours par l'extrémité du diamètre du cercle mobile mené par le point de contact de ce cercle mobile et du cercle fixe.

Des Epicycloïdes sphériques.

Deux cônes droits, qui ont même sommet et qui se touchent, étant coupés par une sphère dont le centre seroit à leur sommet commun, auroient pour bases sur cette sphère deux cercles dont les plans feroient entr'eux le même angle que celui des axes des cônes; si l'on conçoit que l'un de ces cônes roule sur la surface de l'autre, en la touchant continuellement, un point quelconque de la base circulaire du cône mobile décrira dans l'espace une courbe à laquelle on a donné le nom d'*épicycloïde sphérique*, parce qu'elle est tracée sur une sphère qui a pour rayon la distance constante du point générateur de la courbe au sommet commun des cônes droits.

Si le cône fixe devenoit un plan, et le cône mobile un cylindre droit tangent à ce plan, la courbe seroit un cycloïde ordinaire: lorsque les deux cônes droits deviendront des cylindres droits à axes parallèles, la courbe sera l'épicycloïde plane.

Jean Bernouilli a donné dans ses Œuvres (t. III, p. 216, édit. de Lausane, 1742) un Mémoire sur les *épicycloïdes sphériques*, dans lequel il examine les cas particuliers où ces courbes sont rectifiables, et il a trouvé que cette rectification n'étoit possible que lorsque la projection orthogonale du rayon du cercle mobile sur le plan du cercle fixe, étoit égale au rayon de ce dernier cercle, quelle que fût d'ailleurs l'inclinaison des plans de ces cercles.

De la Description de l'Epicycloïde sphérique.

Le rapport connu de la circonférence à son rayon, détermine les longueurs absolues des circonférences du cercle fixe et du cercle mobile dont l'un des points décrit l'épicycloïde; ayant donc divisé la circonférence mobile en un certain nombre de parties égales, chaque partie de cette division correspondra à une partie égale sur le cercle fixe; considérant le cercle mobile dans sa première position, on abaissera de chacun de ses points deux perpendiculaires, l'une sur sa tangente qui est commune au cercle fixe, l'autre sur son diamètre perpendiculaire à cette tangente; lorsque le point de contact des deux cercles chan-

gera, la tangente commune et le diamètre qui lui est perpendiculaire changeront aussi de position, et deviendront des axes mobiles, dont la position à chaque instant sera connue; les projections des deux perpendiculaires abaissées d'un point du cercle mobile sur ses axes se couperont en un point qui appartiendra à la projection de l'épicycloïde; au lieu de considérer chaque point du cercle mobile comme l'intersection de deux coordonnées rectangulaires, si on le regardoit comme l'intersection de l'une de ces coordonnées et d'un rayon, les projections de ces deux dernières droites détermineroient encore un point de l'épicycloïde : or, la projection d'un rayon du cercle mobile se construit facilement, en observant que son centre décrit un cercle qui se projette suivant un cercle égal, et que le rayon prolongé coupe la tangente commune aux deux cercles, en un point qui est le plan même de projection.

De la Tangente à l'Epicycloïde sphérique.

THÉORÊME.

Si pour un point quelconque d'une épicycloïde sphérique, on conçoit le cercle mobile auquel il appartient, la droite qui toucheroit l'épicycloïde qu'on obtiendroit, dans le cas où les deux cercles, l'un fixe et l'autre mobile, seroient dans le même plan, est la projection de la tangente à l'épicycloïde sphérique sur le plan du cercle mobile, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison du plan de ce dernier cercle par rapport au premier.

COROLLAIRE.

Ayant prouvé (*fig.* 2) que la tangente MD à l'épicycloïde plane TM, en un point quelconque M placé sur le cercle mobile BMD, passoit par l'extrémité D du diamètre de ce cercle, perpendiculaire à la tangente commune cBd, il s'ensuit que la même droite MD est la projection de la tangente à l'épicycloïde sphérique, au point M, sur le plan du cercle mobile BMD.

Pour démontrer le Théorême, il faut observer que si le point M d'une épicycloïde plane tend à décrire un arc de cercle dont le point B est le centre, et la droite BM le rayon, le même point M considéré comme appartenant à une Epicycloïde sphérique tend à décrire une sphère dont le point B est le centre, et la droite BM le rayon; donc le plan tangent à cette sphère contient la tangente à l'épicycloïde; or ce plan se projette sur celui du cercle mobile suivant la droite MD per-

pendiculaire à $B\,M$, donc MD' est la projection de la tangente à l'épicycloïde sphérique.

Construction de la Tangente à l'Epicycloïde sphérique.

On a vu que le rayon de la sphère sur laquelle l'épicycloïde est tracée, est égal à la distance d'un point quelconque de cette courbe au point de rencontre des perpendiculaires aux plans des cercles fixe et mobile, élevées par les centres de ces cercles; d'où il suit qu'en menant par le point de l'épicycloïde un plan perpendiculaire à ce rayon, ce plan contiendra la tangente à l'épicycloïde; de plus on vient de démontrer que le plan tangent à la sphère qui a pour rayon la distance du point de l'épicycloïde au point de contact des cercles fixe et mobile, contenoit la même tangente; donc cette tangente est l'intersection de deux plans connus de position, donc elle est déterminée.

Soit $A\ B\ C$ (*fig* 3) le cercle fixe tracé sur le plan horizontal; $B\ M\ D$, le cercle mobile dans une position quelconque, et recouché sur le plan horizontal; $V\ B\ d$, l'angle du plan de ce dernier cercle par rapport au premier, M le point de l'épicycloïde sur le cercle mobile, et M' ce point projeté sur le plan du cercle fixe; il s'agit de construire la tangente $M'\,Y$ à la projection de l'épicycloïde : ayant mené $d\ Y$ perpendiculaire à $B\ d$, et prolongé $M\,D$ jusqu'au point T, intersection de cette droite $M\ D$, et de la tangente commune $B\ T$, la droite $T\,V$ est la trace horizontale du plan tangent à la sphère qui a pour centre le point B, et pour rayon la droite $B\ M$.

Mais la tangente demandée se trouve sur un autre plan tangent à la sphère qui a pour centre le point ω', intersection des deux droites $A\ \omega'$, $\omega'\ \omega$ perpendiculaires sur $A\ B$ au point A, et sur le milieu ω de $B\ d$; or, ce plan passe par la tangente $M\ U$ du cercle mobile, qui coupe le plan horizontal au point U de la trace horizontale $B\ T$; donc, si de ce point U on abaisse une perpendiculaire $U\ X$ sur la projection $A\ M'$ du rayon qui correspond au point du contact de la sphère et du plan, le point X intersection des traces $V\ T\ X$ et $U\ X$, sera un point de la tangente à la projection horizontale de l'épicycloïde; donc $X\ Y$ sera cette tangente; menant $Y\ Y'$ perpendiculaire à $B\ V$, la droite $T\ Y'$ sera la tangente à la projection de la courbe sur le plan vertical $A\ B\ V$.

En supposant le cercle horizontal $A\ B\ C$, transporté en $A'\ B'\ C'$, et le plan incliné $B\ d$ en $B'\ d'$, la nouvelle figure

qui en résulte est tout-à-fait semblable à la première ; d'où il suit que le cône, qui a son sommet en H et pour base l'épicycloïde décrite par un point M du cercle mobile $B\,M\,D$, peut être regardé comme le lieu d'une suite d'épycicloïdes semblables et décroissantes, et les tangentes aux épicycloïdes menées par les différens points d'une même arête, telle que celle qui passe par le point M et le sommet H, sont parallèles entr'elles, et passent toutes par la même droite $H\,V$.

De la tangente aux Epicycloïdes plane et sphérique, déterminée par la méthode de Roberval; par M. GAULTIER.

M. Gaultier, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, s'est proposé de trouver la tangente de l'épicycloïde sphérique par la méthode de Roberval, et de faire voir que cette tangente est l'intersection de deux plans connus de position. La solution qu'il a donnée est très-élégante ; comme elle est en partie analytique, je la ferai connoître dans le prochain Numéro, où je donnerai en même temps l'équation différentielle de l'épicycloïde sphérique.

M. Gaultier a observé que le point générateur de l'épicycloïde sphérique étoit animé de deux vîtesses, l'une suivant la tangente au cercle mobile, l'autre suivant la tangente au cercle qui a son centre sur la perpendiculaire $A\,H$, et pour rayon la distance du point de l'épicycloïde à cette perpendiculaire, et que ces deux vîtesses pour un point tel que M, dont la projection horizontale est M', étoient dans le rapport du rayon $A\,B$ au rayon $A\,M'$ ou de la tangente $B\,C$ à la tangente $M'\,m$; d'où il suit qu'en traçant sur le cercle mobile $B\,S\,d$, un parallélogramme $S\,C'\,S'\,o$, dont les côtés $S\,C'$, $S\,o$ soient égaux à $B\,C$ et à la projection $S\,o$ de $M'\,m$ sur le plan du cercle mobile, la diagonale $S\,S'$ est la projection de la tangente sur le même plan ; on prouve par un calcul simple que cette droite $S\,S'$ doit passer par le point d.

En construisant sur le plan horizontal un parallélogramme $M'\,m\,l\,q$, dont le côté $M'\,q$ est la projection de la droite $S\,C = B\,C$ sur le plan horizontal, la diagonale $M'\,l$ est la tangente à la projection horizontale de l'épicycloïde.

De la tangente à l'Epicycloïde plane.

En appliquant la méthode de Roberval, M. Gaultier construit la tangente à l'épicycloïde plane, de la manière suivante : il mène (fig. 1) deux droites $D\,R$ et $D\,N$, perpendiculaires, l'une au rayon $A\,M$, l'autre au rayon $a\,M$ du cercle mobile.

Les vîtesses du point M, dans les directions perpendiculaires à ces rayons, sont dans le rapport de $A\,M$ à $A\,B$, ou de $A\,M$ à $A\,F$; mais $A\,F$ est parallèle à $M\,a$, parce que les deux triangles $F\,A\,B$ et $B\,a\,M$ sont isocèles; donc, le triangle $N\,D\,M$ est semblable au triangle $F\,A\,M$; donc, $A\,M : A\,F :: N\,D : M\,N :: M\,R : M\,N$; donc, $M\,D$ est le parallélogramme des vîtesses $M\,N$ et MR, l'une suivant la tangente du cercle au rayon $A\,M$, l'autre suivant la tangente du cercle qui a pour rayon $B\,a$, et par conséquent la droite $M\,D$ est la tangente demandée.

§. II. SCIENCES PHYSIQUES.

Expériences faites au Laboratoire de l'Ecole Polytechnique, par MM. Gay-Lussac *et* Thenard.

Électricité.

La pile voltaïque dont Sa Majesté a fait don à l'Ecole Polytechnique (*voyez la Corresp.*, p. 450), a été mise en activité le 29 juillet 1808.

Cette pile est composée de six cents plaques; chaque plaque est en deux parties, *cuivre* et *zinc*, soudées ensemble; la partie *cuivre* pèse un kilogramme, et l'autre en *zinc* pèse trois kilogrammes. Des six cents plaques, cinq cents sont d'une forme carrée sur la plus grande face; le côté de ce carré est de trois décimètres : la plus grande face sur les cent autres est un parallélogramme rectangle de six décimètres sur quinze centimètres, c'est-à-dire, d'une surface égale à celle du carré de trois décimètres de côté.

La pile est montée à la manière de Pepys, avec des modifications qui en rendent le service plus prompt et plus commode; elle a été mise en activité en moins de trois minutes.

On a soumis au courant électrique de la pile entière les trois terres *baryte*, *strontiane* et *chaux*.

Elles ont toutes manifesté des phénomènes de combustion au pôle négatif: la chaux principalement donnoit une flamme vive et rouge.

La baryte dégageoit une vapeur dont on se trouvoit incommodé.

Du Gaz Fluorique.

En chauffant dans un tube de fer le fluate de chaux et l'acide boracique vitreux, on obtient du *gaz fluorique*, qui tient en dis-

solution une assez grande quantité d'acide boracique. Ce gaz fluorique ne peut pas contenir d'eau hygrométrique; il a une telle affinité pour l'eau, qu'il s'y combine en prenant la forme liquide; il enlève l'eau, hygrométrique à tous les gaz qui en contiennent, et la convertit en un liquide acide. Mis en contact avec des gaz desséchés par la chaux ou par le muriate de chaux, il ne forme pas de liquide, ce qui prouve que ces gaz ne contiennent plus d'eau hygrométrique.

L'eau saturée de gaz fluorique obtenu par l'acide boracique est limpide, fumante, et des plus caustiques; cependant elle n'a aucune action sur le verre.

Le fluate de chaux siliceux, décomposé par le phosphate acide de chaux, donne beaucoup de gaz fluorique siliceux.

En décomposant le fluate de chaux dans un vase de plomb, par l'acide sulfurique concentré, on obtient un liquide qui jouit des propriétés suivantes: il répand dans l'air d'épaisses vapeurs; il s'échauffe et entre même subitement en ébullition avec l'eau; il dépolit le verre, le dissout, et le réduit en gaz siliceux. Son action sur la peau est très-rapide; il la désorganise instantanément.

Il n'y a aucun moyen d'obtenir le gaz fluorique pur; pour décomposer ce gaz par le métal de la potasse, on a préféré prendre le gaz siliceux, parce que la silice n'est pas un combustible. En chauffant ce gaz siliceux mis en contact avec le métal de la potasse, il y a production de lumière et de chaleur. Cette combustion donne pour résidu du fluate de chaux, de la silice, et une *substance particulière* combinée avec la potasse et la silice. Cette substance particulière est la base du gaz acide fluorique.

Sur l'Acide Boracique.

L'acide boracique est décomposé par le métal de la potasse; son radical est un brun-verdâtre, fixe et insoluble dans l'eau. On doit le placer à côté du charbon, du phosphore et du soufre. Pour passer à l'état d'acide, il exige une grande quantité d'oxigène; avant d'arriver à cet état, il passe a celui d'oxide.

Sur le Gaz Acide Muriatique.

Le gaz acide muriatique, considéré autrefois comme une substance simple, résulte de la combinaison du gaz acide muriatique oxigéné et du gaz hydrogène; pour obtenir cette combinai-

son, on prend des volumes égaux de ces deux gaz, et on les mêle ensemble; ayant élevé la température du mélange à 125°, une forte détonation accompagne l'action réciproque et instantanée des deux gaz; un rayon direct du soleil produit sur le mélange les mêmes effets. La combinaison des deux gaz a encore lieu dans une lumiere diffuse, mais elle se fait plus lentement.

---

§. III. ANNONCES D'OUVRAGES.

Essai sur la composition des Machines, par MM. LANZ et BETANCOURT, 1 vol. *in*-4°., 10 planches; précédé du *Programme d'un Cours Elémentaire des Machines, fait à l'Ecole impériale Polytechnique*; par M. HACHETTE.

Programme d'un Cours de Physique, ou Précis de Leçons sur les principaux phénomènes de la nature, et sur quelques applications des Mathématiques à la Physique, par M. HACHETTE, 1 vol. in-8.

Cet ouvrage est divisé en douze leçons, ainsi qu'il suit:

1re. *Leçon.* Notions générales sur les corps et sur les forces qui unissent les molécules de ces corps.

2e. *Leçon.* De l'étendue et de la figure des corps.

3e. *Leçon.* De la cristallographie.

4e. et 5e. *Leçons.* De la mobilité et de la gravité.

6e. *Leçon.* De l'action capillaire.

J'ai donné dans cette leçon la démonstration du théorême de M. *Laplace*, sur l'ascension des liquides dans les tubes capillaires.

7e. *Leçon.* Du calorique, par M. *Monge*.

8e. *Leçon.* De l'action réciproque de l'eau et de l'air.

9e. et 10e. *Leçons.* De la lumière.

J'ai expliqué dans cette leçon les principaux effets de la réflexion et de la réfraction, par la considération des *caustiques*. Les articles *arc-en-ciel* et *acromatisme* sont présentés d'une manière nouvelle.

MM. les Elèves de l'Ecole Polytechnique liront avec intérêt l'explication du mirage, par M. *Monge*.

11e. *Leçon.* De l'Électricité.

J'ai suivi dans cette leçon la marche qui avoit été tracée par M. *Monge*, pour l'exposition des phénomènes électriques; j'y ai ajouté l'explication du bruit du tonnerre, par ce célèbre physicien, et l'instruction du Comité des fortifications sur la construction des paratonnerres.

12e. *Leçon*. Du magnétisme.

J'ai décrit dans cette lecon la boussole de mer, et un instrument propre à mesurer l'*inclinaison* de l'aiguille aimantée, qui appartient au cabinet de physique de l'Ecole Polytechnique.

La description d'un autre instrument très-utile à tous les ingénieurs des services publics, le Baromètre portatif de *Fortin*, est accompagnée d'un dessin qui en montre la construction et l'usage.

Cet ouvrage est terminé par des tableaux numériques, indispensables pour tous ceux qui s'occupent de physique ou de chimie.

L'un de ces tableaux présente les capacités de calorique de différentes substances. (Les nouvelles recherches de MM. Bérard et Delaroche, sur les capacités pour le calorique, ont donné d'autres nombres, qui méritent plus de confiance.)

---

§. IV. PERSONNEL.

M. Neveu, instituteur de dessin à l'Ecole Polytechnique est décédé le 7 août 1808. Il a été vivement regretté de tous ses collègues.

M. Vincent, peintre, membre de l'Institut et de la Légion d'Honneur, est nommé instituteur de dessin, en remplacement de M. Neveu; le décret impérial de sa nomination est du 23 novembre 1808.

M. Poisson, instituteur à l'Ecole Polytechnique, a été nommé adjoint au Bureau des longitudes, par un décret impérial du 14 septembre 1808.

M. Hachette est nommé membre honoraire du Bureau consultatif des arts et manufactures au Ministère de l'Intérieur; la lettre de nomination est du 25 novembre 1808.

M. Ampère, répétiteur d'Analyse à l'Ecole Polytechnique; MM. Rendu (Ambroise), Guenaud (Philibert), anciens élèves de l'Ecole Polytechnique, ont été nommés inspecteurs-généraux de l'Université.

M. Malartic (Charles-Jean-Baptiste-Alphonse), ancien élève, a passé aux fonctions de secrétaire de la Légation française près S. M. le roi de Wurtemberg, à Stuttgard.

M. Meaume, ancien élève, est professeur de mathématiques au Lycée de Rouen.

M. Clércau, ancien élève, est professeur de mathématiques au Lycée de Gand.

Les anciens élèves, promus jusqu'à ce jour (janvier 1809), au grade d'ingénieur en chef des ponts-et-chaussées, sont : MM. Lamandé fils, Brisson, et Saint-Genis.

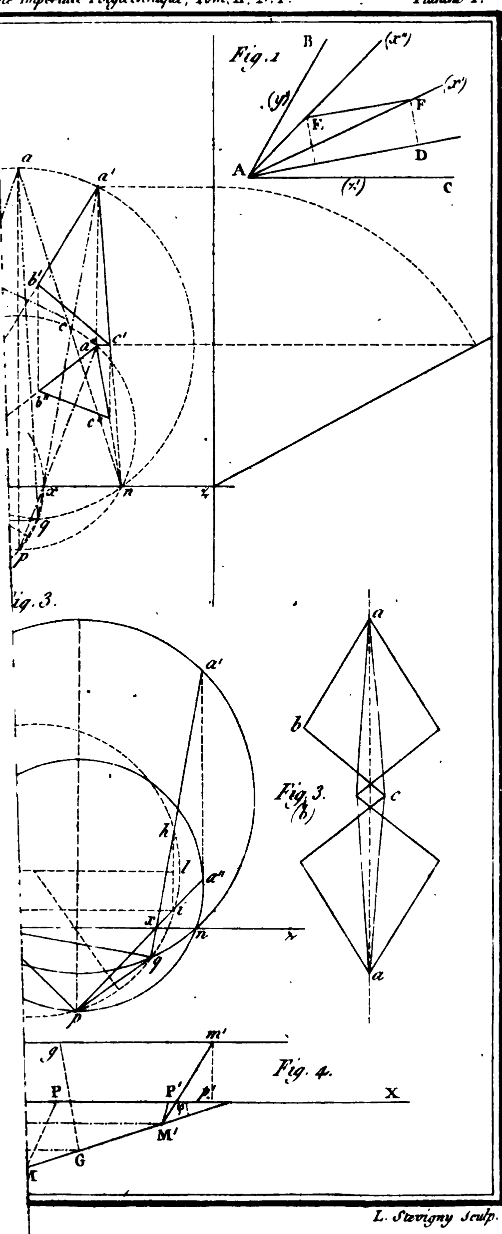
MM. Finot (A.-B.) et Le Tonnelier-Breteuil, anciens élèves, ont été nommés auditeurs au Conseil-d'Etat.

M. le chevalier Berge, colonel du 5e. Régiment d'Artillerie à cheval, remplit les fonctions de chef de l'état-major général de l'Artillerie, à l'armée d'Espagne.

EXAMINATEURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, *pour le Concours de* 1808.

Paris.	M. AMPÈRE.
Tournée du Sud-Ouest.	M. DINET.
Tournée du Nord-Est.	M. LABEY.
Tournée du Sud-Est.	M. FRANCŒUR.

Les examens ont été ouverts le 5 août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 1er novembre.



L. Stevigny Sculp.

L. Sterigny sculp.

§. V. CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

La neuvième session du Conseil de perfectionnement a été ouverte le 19 octobre 1808, et a été terminée le 11 mars 1809.

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole, Président.

Son Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics; membres désignés par la loi.

MM. Legendre, Lacroix, Vauquelin, Malus.

Membres de l'Institut national, pris, selon la loi, dans la classe des sciences physiques et mathématiques.

MM. Lagrange, Laplace, Berthollet.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre.

MM. Thirion, inspecteur-général de l'artillerie de la marine; Allent, officier supérieur du génie; Brousseaud, chef de bataillon, ingénieur-géographe.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine.

MM. Sugny, inspecteur-général de l'artillerie de la marine; Sané, inspecteur-général du génie maritime.

Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur

MM. Prony, inspecteur-général des ponts-et-chaussées; Lelièvre, inspecteur-général des mines.

Directeur des études de l'Ecole impériale Polytechnique.

M. Vernon.

Commissaires choisis par le conseil d'instruction de l'Ecole, parmi ses membres.

MM. Monge, Guyton, Andrieux, Poisson.

Quartier-Maître de l'Ecole Polytechnique, Secrétaire.

M. Marielle.

§. V. CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

La neuvième session du Conseil de perfectionnement a été ouverte le 19 octobre 1808, et a été terminée le 11 mars 1809.

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole, Président.

Son Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics ; membres désignés par la loi.

MM. Legendre, Lacroix, Vauquelin, Malus.

Membres de l'Institut national, pris, selon la loi, dans la classe des sciences physiques et mathématiques.

MM. Lagrange, Laplace, Berthollet.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre.

MM. Thirion, inspecteur-général de l'artillerie de la marine ; Allent, officier supérieur du génie ; Brousseaud, chef de bataillon, ingénieur-géographe.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine.

MM. Sugny, inspecteur-général de l'artillerie de la marine ; Sané, inspecteur-général du génie maritime.

Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur

MM. Prony, inspecteur - général des ponts - et - chaussées ; Lelièvre, inspecteur-général des mines.

Directeur des études de l'Ecole impériale Polytechnique.

M. Vernon.

Commissaires choisis par le conseil d'instruction de l'Ecole, parmi ses membres.

MM. Monge, Guyton, Andrieux, Poisson.

Quartier-Maître de l'Ecole Polytechnique, Secrétaire.

M. Marielle.

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 159 *Candidats admis à l'Ecole impériale Polytechnique, suivant la décision du Jury du* 28 *septembre* 1808.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Allain *dit* Surville.	Eugène - Auguste-Georges-Louis.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Armand.	Jean-François.	Bar-sur-Aube.	Aube.
Asselin-de-Crève-Cœur.	Armand-L.-François.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Bachelay.	Jean-Baptist-Gaston.	Larochelle.	Charente-Infér.
Baudesson.	Augustin-Edme-Mic.	Fontainebleau.	Seine-et-Marne.
Baudreuil.	Franç.-Henry-Alph.	Saint-Quentin.	Aisne.
Belanger.	J.-B.-Charles-Joseph	Valenciennes.	Nord.
Bernard.	Honoré.	S.Benoît du Sault.	Indre.
Boissière.	Antoine-Louis.	Paris.	Seine.
Boistel *dit* Duroyer.	Charles-Frédéric.	Amiens.	Somme.
Bonie.	François.	Bordeaux.	Gironde.
Boquet.	Blaise-Hilaire.	Soissons.	Aisne.
Cabannes - Laprade.	Alexand.-Jean-François.	Marsal.	Meurthe.
Caqueray - de-Fontenelle.	Charles-Marie.	Maucomble.	Seine-Inférieure.
Carbonazzi.	Jean Antoine Joseph-Camille.	Félizzano.	Marengo.
Cassé.	Jean-Bapt.-Antoine.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Cerf-Berr.	Alphonse-Théodore.	Nancy.	Meurthe.
Chiappe.	Jean-Jacques.	Ajaccio.	Liamone.
Clausade.	Joseph-Martial.	Castelnaudary.	Aude.
Collas.	Jean-Lazare.	Autun.	Saône-et-Loire.
Comynet.	Auguste-Edouard.	Paris.	Seine.
Coriolis.	Gaspard-Gustave.	Paris.	Seine.
Corrèze.	Joseph.	Meyssac.	Corrèze.
Costa.	Roland.	Chiavari.	Apennins.
Cotte.	Louis-Etienne-César.	Riez.	Basses-Alpes.
Courtois.	Aimé-Charlemagne.	Compiègne.	Oise.
Cousinery.	Barthélemy-Edouard.	Marseille.	Bouc. du-Rhône.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Couturat.	Augustin-Fr.-Clém.	Paris.	Seine.
Cuel.	Charles-André.	Haucourt.	Seine-Inférieure.
Dadole.	Pancrace.	Paris.	Seine.
Dartois.	Honoré-Prosper.	Paris.	Seine.
Decayeu.	Jean-Baptiste-Henri	Abbeville.	Somme.
Dehaussy.	Alexandre.	Péronne.	Somme.
Delafosse.	Louis-André.	Paris.	Seine.
Delafuye.	Victor-François.	Azé.	Mayenne.
Delattre-D'Aubigny.	Adolphe-Louis-Geneviève-Firmin.	Epernai.	Marne.
Delavenne.	Aug.-Elisabeth-Cés.	Tannay.	Nièvre.
Delseries.	Antoine.	Sonnac.	Lot.
Demonet - Lamarck.	Guill. Emm. Auguste	Paris.	Seine.
Desages-d'Heure.	Jean-François.	Terrasson.	Dordogne.
Desjardins.	Allain-Louis-Antoine	Paris.	Seine.
Devere.	Lambert.	Paris.	Seine.
Deviefville.	François - Georges-Frederic-Auguste.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Ducasse.	Jean-Baptiste.	Villen.-sur-Lot.	Lot-et-Garonne.
Duché.	Vital.	Châl.-sur-Saône.	Saône et-Loire.
Duffouré.	Philippe-Laurent.	Astafort.	Lot-et-Garonne.
Dufrayer.	Adrien-Stanislas.	Paris.	Seine.
Dupré.	Denis-Ant.-Honorine	Honfleur.	Calvados.
Durand.	Gustave-Othon.	Séverac.	Aveyron.
Durfort-Léobard	Anne-Charles-Frédér.	Besançon.	Doubs.
Emon.	Jean-Louis.	Pont-Levoy.	Loir-et-Cher.
Ethéart.	Barthelemy-Auguste.	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Falguière.	Jean - Marie - Alban-Michel.	Rabastens.	Tarn.
Filhon.	Charles-Marie.	Barbezieux.	Charente.
Floquet.	Jean-Robert.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Franchessin.	Ernest.	Cattenom.	Moselle.
Frimot.	Jacques-Joseph.	St.-Germain-le-Gaillard.	Manche.
Froussard.	Claude-Victor-Louis.	Chaumont.	Haute-Marne.
Galiot.	Marie-Mathurin.	Fauguernon.	Calvados.
Gambier.	Alexandre-Pierre.	Paris.	Seine.
Gardeur-Lebrun.	Auguste-Stanislas.	Metz.	Moselle.
Gargan.	Théod. Charl.-Joseph	Inglange.	Moselle.
Gazel.	Julien.	Lunéville.	Meurthe.
Genieys.	Raymond.	Adissan.	Hérault.
Gensolen.	Fortuné.	Hières.	Var.
Gilberton.	Gilbert-Charles.	Hérisson.	Allier.
Godin.	Pierre-Gasp.-Cosme.	St.-Saulge.	Nièvre.
Goupil.	Auguste-Jean.	Alençon.	Orne.
Goureau.	Claude-Charles.	Pisy.	Yonne.
Gourier.	Nicolas-Antoine.	Pont-à-Mousson.	Meurthe.
Goussard.	Charles-Eugène-Félix	Paris.	Seine.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Gravelle.	Barthélemy.	Charny le Bachot.	Aube.
Griffet-Labaume	Charles-Antoine.	Roanne.	Loire.
Gueuyveau.	Denis.	Saumur.	Maine-et-Loire.
Guillebon.	Alexandre.	Wavignies.	Oise.
Hercouet.	Gaspard-Henri.	St.-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Hubert.	Arsène-Claude.	Paris.	Seine.
Huguenot *dit* Lalance.	Alexandre-Frédéric.	Montbéliard.	Haut-Rhin.
Hurel.	François-Félix.	Pointe-à-Pitre.	Ile-de-la-Guadeloupe.
Hyman.	Louis-Alexandre.	Paris.	Seine.
Jacquemont.	Fr.-Joseph-Porphire.	Arnouville.	Seine-et-Oise.
Jacquin.	Mic.-Léonard-Théod.	Dôle.	Jura.
Jolivet de Riencourt.	Marie-Edme-Martin.	Cherbourg.	Manche.
Josserand.	Jean-Louis-Justin.	Montélimart.	Drôme.
Jouvin.	Jacques.	Nismes.	Gard.
Jubié.	Joseph-Noël-Jules.	La Sône.	Isère.
Labrosse-Luuyt.	Jacques-Louis.	Lyon.	Rhône.
Lafont du Cujula	Joseph-Martial-Marcellin.	Agen.	Lot-et-Garonne.
Lanteri,	Ant.-Raphaël-Elie-Vinc.-Emm.-Marie	Loano.	Montenotte.
Laroze.	Henry-Julien-Jean.	Paris.	Seine.
Laurenceot.	Joseph-Théophile-François-Xavier.	Arbois.	Jura.
Laval.	Jacques-Raymond.	Pergain.	Gers.
Lavallée.	Hilaire.	Isle-Bouchard.	Indre-et-Loire.
Le Corbeiller (1).	Martin-Aug.-Marie.	Paris.	Seine.
Lecouroyer.	Guillaume-Augustin.	Ectot-les-Baons.	Seine-Inférieure.
Lefebvre	Louis.	Falaise.	Calvados.
Lefrançois-Delalande.	Isaac.	Paris.	Seine.
Legraverend.	André-Franç.-Guill.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Lemasson.	Marie-Thomas.	Clermont Ferrant	Puy-de-Dôme.
Lenfant.	Jean.	Ecueil.	Marne.
Le Rouge.	Pierre-Jacques.	Condé sur Risle.	Eure.
Lesbros.	Joseph-Aimé.	Veynes.	Hautes-Alpes.
Louis.	Claude-Jos.-Leufroy.	Ervy.	Aube.
Louuel.	Gratien-Désiré.	St.-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Lugaigne.	Jean-Bapt.-Jacques.	Pezenas.	Hérault.
Mareuse.	Louis Ant.-Hippol.	St.-Quentin.	Aisne.
Mary.	Louis-Charles.	Metz.	Moselle.
Merland.	Preux-Joseph.	St.-Gilles-sur-Vie	Vendée.
Moneuze.	Guillaume-François.	Rheims.	Marne.
Morin.	Pierre-Etienne.	Rouen.	Seine-Inférieure.

(1) M. Le Corbeiller avoit déjà été admis en 1807, mais il n'avoit pas rejoint.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Morlot.	Jos.-Charles-Antoine	Paris.	Seine.
Munier.	Dominique-Nicolas.	Jouy-aux-Arches.	Moselle.
Noël.	Jean Félix.	Bruxelles.	Dyle.
Noizet.	François-Joseph.	Paris.	Seine.
O.-Farell.	Alexandre-Augustin.	Le Puy.	Haute-Loire.
Olry.	Pierre-Adolphe.	Vandœuvre.	Meurthe.
Oury.	Pierre-Constantin.	Tourlaville.	Manche.
Paqueron	Nicolas.	Ancerville.	Meuse.
Pâquet.	Victor-Antoine.	Meaux.	Seine-et-Marne.
Parès.	Jos.-François-Pierre-Jean.	Rivesaltes.	Pyrénées-Orient.
Paret.	Claude-Jos.-Camille.	Lyon.	Rhône.
Pargoire.	Jean-Pierre.	St.-Pons de Mau-Chiens.	Hérault.
Pequeult de la Varande.	Antoine-Gabriel.	Lisieux.	Calvados.
Perreyve.	Joseph.	Lyon.	Rhône.
Perrot.	Ange-Jean-Joseph.	Plobonalec.	Finistère.
Petitot-de-Mont-Louis.	Thélesphore-Ennemond-Marie.	Parme.	Taro.
Peyret.	Jean-L.-Ant.-Emélie	Aiguesmortes.	Gard.
Poilleux.	Antoine.	Melun.	Seine-et-Marne.
Pouettre.	Casimir.	Touques.	Calvados.
Poupart.	Charles-Henry.	Angers.	Maine-et-Loire.
Raigniac.	Franç.-Louis-Marie-Anne-Gabriel-Jean Saint-Cyr-Marie-Jeanne.	Artigues.	Lot-et-Garonne.
Reguis.	Louis-Xavier.	Sisteron.	Basses-Alpes.
Rolland-Garagnol.	Jean-Pierre-Camille.	Grenoble.	Isère.
Rondeau-Martinière.	Louis-Noël.	Neuvy-la-Loi.	Indre-et-Loire.
Roy.	Edme.	Ville sous la Ferté	Aube.
Rudler.	Jean-Baptiste.	Guebviller.	Haut-Rhin.
Sahuguet-d'Amarzit-d'Espagnac.	Amable-Jean-Joseph-Charles.	Paris.	Seine.
Saladin.	Auguste-Henry.	Genève.	Léman.
Savart.	Nicolas.	Mezières.	Ardennes.
Schérer.	Charles-Louis.	Paris.	Seine.
Serres.	Jean-Joseph.	La Roche-des-Arnauds.	Hautes-Alpes.
Sers.	Jean-Jacques.	Bordeaux.	Gironde.
Sertour.	Louis-Antoine.	Oulx.	Pô.
Simon.	André-Jean-Baptiste-Arbogast.	Colmar.	Haut-Rhin.
Soufflot.	François.	Paris.	Seine.
Soulier.	Jean-Joseph.	Clermont-Ferrand	Puy-de-Dôme.
Surineau.	Aug.-Joseph-Gaston.	Luçon.	Vendée.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Tabareau.	Charles-Henry.	Béziers.	Hérault.
Tardu.	Antoine-François.	Paris.	Seine.
Thiry.	Charles-Ambroise.	Nancy.	Meurthe.
Tiron.	Edme-Marie Prosper-Guillaume.	Paris.	Seine.
Tournaire.	Guillaume.	Riom.	Puy-de-Dôme.
Umpfenbach.	François-Antoine.	Mayence.	Mont-Tonnerre.
Valleuet.	Antoine-Bertrand-Eugène.	Livry.	Seine-et-Oise.
Vatrin.	Charles-Antoine.	Etain.	Meuse.
Vene,	Antoine.	Vialas.	Tarn.
Vincent.	Louis-Auguste.	Grenoble.	Isère.
Vivier-Lachaise.	Pierre-Edouard.	Saint-Pierre-le-Montier.	Nièvre.
Vuillet.	Joseph-Augustin.	Die.	Drôme.

ÉVÉNEMENS PARTICULIERS.

M. Pellegrin (Séraphin-Dominique), élève de l'Ecole impériale Polytechnique, se promenoit au bord de l'eau, devant le port des Invalides, le mardi 14 février 1809; il aperçoit au milieu de la rivière un homme luttant contre la mort (c'étoit un trompette des dragons de la garde de Paris); il se précipite tout habillé dans les flots, et parvient à le ramener heureusement à bord.

M. le Conseiller d'Etat, Préfet de Police, en donnant connoissance de cet acte de dévouement à M. le Ministre-d'Etat, Gouverneur de l'Ecole Polytechnique, l'a prié de vouloir bien transmettre au jeune élève le témoignage de sa satisfaction particulière.

Dans le courant du mois de janvier dernier, un brick français s'étant brisé sur un écueil en vue de Quiberon, le jeune de Bouteillier (Charles-François-Romaric), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, officier dans le sixième régiment d'artillerie à pied, se porta sur le rivage pour voir si l'on pouvoit donner quelques secours aux naufragés. La brume, dont la mer très-houleuse étoit couverte, s'étant dissipée, il aperçut, vers les cinq heures, deux hommes qui luttoient contre les flots. Alors ne consultant que son cœur, il se jette à la mer; et bientôt, suivi d'un second, il parvint à sauver les deux naufragés, qui, depuis trois heures, cherchoient en vain à aborder le rivage, et qui, exténués de fatigue, étoient près de périr.

Ce jeune homme a rendu compte de cet événement à son père avec une sensibilité et une modestie touchante; « *J'ai senti, dit-il, en prenant la » main glacée de ces malheureux, que ce moment seroit un des plus » beaux de ma vie.* »

M. de Bouteillier est un officier de mérite, qui s'est fait déjà distinguer dans les dernières campagnes.

CONCOURS DE 1808.

Le jury d'admission de l'Ecole Impériale Polytechnique a prononcé, le 28 septembre, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année;

Trois cent quatre-vingt-un candidats ont été examinés, tant à Paris que dans les départemens.

Deux cent soixante-treize ont été déclarés admissibles pour les sciences mathématiques;

Mais deux ont été exclus du concours par le jury, parce qu'ils s'étoient présentés à deux examinateurs, et qu'ils avoient été examinés deux fois.

Le jury a également exclu du concours :

1°. Onze candidats trop peu instruits dans le dessin, ou n'ayant pas concouru dans cette partie;

2°. Six n'ayant pas concouru dans la langue latine;

3°. Deux, comme ne connoissant pas suffisamment leur langue.

Le nombre des candidats entre lesquels le jury a dû faire un choix, a donc été de 251, sur lesquels 159 ont été admis.

Nombre des Candidats examinés en 1808, 381, savoir :

A Paris.	142	381.
Dans les départemens . . .	239	

Nombre des candidats admis en 1808, 159, savoir :

A Paris.	79	159
Dans les départemens. . . .	80	

Nombre des Elèves admis jusqu'au 10 novembre 1807	1980
Nombre total des Elèves admis à l'Ecole depuis son établissement	2139

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Le jury, présidé par M. le Gouverneur, et composé des deux Examinateurs permanens, MM. Legendre et Lacroix (1), et des Examinateurs temporaires, MM. Vauquelin et Malus, a arrêté, le 5 octobre 1808, les listes suivantes, par ordre de mérite; savoir :

Artillerie de terre. MM. Regneault, Poillèvé de la Guérinais, Lanoue, Bréon, Avéros, Faurie, Coessin, Lagarde, Boisset, Gailly, Pissin aîné, Raoul, Lafitte, Bouchard, Teissier, Baston-Lariboisière, Favier, Lamy, Gislain-Bontin, Pissin jeune, Culmann, Vathaire, Franchessin, Grandjean, Poulain (Delphin), Puymirol, Bezault, Sainte-Aldegonde, Nancy, Robillard, Damey-Saint-Bresson, Ratoin, Thoumas, Lerey, Amillet (J.-H.-U.), Joffre, Caurant, Savoye, Besser, Jacomet, Toytot, Frémond, Desnoyers, Prisye, Prévost, Mariez, Donzelot, Royer, Belly, Viart. 50

Artillerie de mer. MM. Barthez, Rieu, Antoine, Briois, Ducluseau, Dellac, Hénin, Merlin, Mosseron d'Amboise, Vassal, Charpentier, Mayer-Marx, Moulin (P.-N.-A.), Belenet, Bourouse-Laffore. 15

Génie militaire. MM. Picot, Dombey, Leroux-Douville, Lapipe, Locher, Goeury, Vuilleret, Négrier, Leroy (F.-A.), Cassières, Barbaud, Anselmier, Drumel, Pintedevin-Dujardin, Million, Vincenot, Furgole, Becquerel, Raffard, Lemercier, Comte, Choumara, Larmandie, Sudour, Lepescheur de Branville. 25

Ponts et Chaussées. MM. Pellegrini, Grandin (C.-H.-P.), Mallet, Teichmann, Jousselin, Guyton, Cailloux, Letocart, Borgognon, Marcilly, Poirée, Frissard, Journet, Reydellet, Mounier, Leguay, Morisset-Dubreau, Robinot, Verdier, Viollet, Marcellin, Bardel, Jémois. 23

Mines. MM. Gueymard, Gabé, Gardien, Roussel-Galle, Jacques, Chéron, Roussel. 7

Construction des vaisseaux. MM. Dubois (L.-J.-F.), Demoor, Jobert, Pirard, Leroux, Janin, dit *Lescure* (2). 6

Poudres et salpêtres. MM. Bineau, Grandbesançon (3). 2

---

(1) M. Lacroix a remplacé, comme examinateur permanent, M. Bossut, qui n'a pu en remplir les fonctions pour cause de maladie.

(2) Passés dans ce service en juin 1808, à la suite d'un concours particulier.

(3) Passés dans les poudres et salpêtres en juin 1808, à la suite d'un concours public.

Sous-lieutenans dans la ligne.

MM. Mangin-Douence, Bouché (G.-F.-E.), Deprez de Crassier, Petit (L.-J.-B.-D.), *nommés sous-lieutenans* 4

Démissionnaires.

MM. Beck (Minard), Cahusac, Costa, Douzon, Lecorbeiller, Lepasquier, Paulet, Prou. 8

Morts.

MM. Bouyer, Devallée, Druet-Desvaux, Gilbert, Guibaud. 5

Etat de situation des Elèves de l'Ecole Impériale Polytechnique, à l'époque du 1er. novembre 1808; et résultat des opérations des jurys d'admission dans les services publics, de passage de la seconde division à la première, et d'admission à l'Ecole.

L'école étoit composée, le 10 novembre 1807, de 316 Elèves;

SAVOIR:

Première division.	134	316 Elèves.
Seconde division.	182	

Elle a perdu dans le cours de l'année,

Morts	Première division. . . .	1	5	145
	Seconde division. . . .	4		
Démissionnaires	Première division.	2	8	
	Seconde division. .	6		
Passés sous-lieutenans dans la ligne. . .			4	

Admis dans les services publics.

Artillerie de terre.	50	128	
Artillerie de mer.	15		
Génie militaire.	25		
Ponts-et-chaussées	23		
Construction des vaisseaux. . . .	6		
Mines.	7		
Poudres et salpêtres.	2		

Au 1er. novembre 1808, l'Ecole restoit composée de 171 Elèves;

SAVOIR:

Première division.	1	171
Seconde division.	170	

Le Jury a pensé que sur les 170 Elèves qui composoient la deuxième division, 150 étoient susceptibles de passer à la première, et que 20 devoient faire une seconde année dans cette division. Il en résulte que la nouvelle première division s'est trouvée composée de 151 Elèves.

Ajoutant aux 171 Elèves qui restent à l'Ecole, les 159 qui ont été admis au concours de cette année, ci. 159

L'Ecole s'est trouvée composée, au 1er. novembre 1808, de 330 Elèves,

SAVOIR:

Première division	151	330
Seconde division.	179	

DISCOURS

Prononcé par le Préfet de la Seine-Inférieure (1), à l'ouverture de l'examen des aspirans à l'Ecole Polytechnique, le 5 septembre 1808.

Messieurs,

Je vous ai réunis pour assister à l'ouverture des Examens qui vont avoir lieu pour l'admission des Elèves à l'Ecole impériale Polytechnique.

Cette Ecole, dès sa naissance, a été célèbre dans le monde savant, par l'étendue, la perfection de son enseignement, et

(1) M. Savoye-Rollin.

la haute réputation des professeurs qui y ont successivement présidé.

Aujourd'hui, son organisation, l'utile et noble destination de ses Elèves, la protection spéciale de S. M. l'Empereur, sous les yeux duquel elle fleurit, tous ces titres lui assurent le premier rang parmi nos institutions de l'instruction publique. J'ai voulu signaler, autant qu'il est en moi, tous ces avantages; j'ai voulu contribuer à les rendre sensibles aux jeunes gens, aux pères de famille et aux instituteurs; enfin, j'ai cru remplir les vues du Gouvernement, en faisant moi-même l'ouverture de ces Examens, et en y appelant toutes les personnes qui, par leurs fonctions ou la nature de leurs études, peuvent contribuer à l'intérêt et à la solennité de cette cérémonie.

L'Ecole Polytechnique, Messieurs, n'est point une de ces institutions, telles que les capitales en ont offert quelquefois des exemples, qui, placées au premier rang par des priviléges plutôt que par des services, ne répondent aux faveurs du Gouvernement que par des prétentions, et n'obtiennent jamais d'autre éclat que celui qu'elles tirent de la protection du Souverain. La plus grande gloire de l'Ecole Polytechnique lui est personnelle; elle lui vient de cette nombreuse suite d'Elèves qui sont sortis de son sein. Quelques-uns ont déjà rendu leurs noms célèbres dans l'Europe; plusieurs occupent dans leur patrie des places éminentes, récompense de leurs services: tous font rejaillir sur l'Ecole qui les a formés, l'honneur et la considération qu'ils se sont acquis.

C'est même un sujet d'étonnement lorsqu'on considère la multitude d'hommes distingués dans tous les genres, qui s'honorent du titre de ses Elèves, de réfléchir qu'elle a à peine quinze ans d'existence. Mais elle offre cela de particulier dans son histoire, qu'elle n'a pas eu d'enfance. Née au milieu des orages politiques, ses premiers fondateurs furent les premiers savans de la France; et ils se servirent, pour répandre et pour perfectionner les arts utiles, de toute l'énergie, de toute l'activité, de tout l'enthousiasme qui caractérisa cette époque, et qui, hors l'enceinte de cet asile des sciences, étoit dirigé par des cœurs moins purs, et vers de moins nobles usages.

Depuis ce moment, on a vu chaque année sortir de dessus ses bancs des essaims de jeunes savans qui se sont répandus dans nos armées, dans nos ports, sur nos routes et dans nos lycées. Partout ils ont porté cette aptitude éclairée, qui simplifie et perfectionne tous les objets auxquels elle s'applique, et qui elle-même n'est qu'une continuelle application des théories de la science. C'est là le plus grand service que pourroit rendre l'Ecole

impériale Polytechnique, de resserrer à jamais par son enseignement les nœuds qui doivent unir les sciences spéculatives et les arts appliqués.

Ce fut un spectacle nouveau dans l'histoire moderne des sciences, de voir des hommes dont les noms se plaçoient naturellement à la tête de l'Europe savante, descendre des hauteurs de leurs spéculations, pour se livrer à toutes les pratiques des arts, créer des artistes, des savans et des officiers, partager leur temps entre les méditations, les expériences et les fatigues de l'enseignement, et transporter, en un mot, dans leur vie et leurs habitudes, l'activité à laquelle jusque-là leur pensée seule avoit été accoutumée.

Cette heureusé influence s'est propagée : c'est à elle que nous devons cette destination plus active que l'on remarque parmi les savans qui, de nos jours, appliquent eux-mêmes le savoir à tout ce qui est utile, et prouvent, par des résultats, les avantages de l'étude à cette partie du public qui n'en connoîtra jamais les charmes, et qui n'en apprécieroit pas autrement l'utilité. On les voit dans les carrières de l'industrie, de l'administration, de l'intruction publique; ils se montrent dans les camps, dans les ateliers, et par-tout ils joignent à l'éclat de la science celui des services rendus à l'Etat.

Cet aspect du monde savant n'appartient qu'à l'époque où nous vivons : cette observation est une de celles qui lui fait le plus d'honneur.

Je me félicite de ce que la présence, ici, de M. l'Examinateur, m'a fourni l'occasion d'en faire la remarque.

Les jeunes gens qui m'écoutent, et qui sont venus pour concourir, n'ont pas dû se dissimuler que le titre qu'ils ambitionnent, devient tous les ans plus recherché, plus disputé, et, je dois le dire, plus difficile à obtenir. C'est donc avec cette conviction, jeunes Elèves, que vous avez dû vous préparer à cet Examen, qui fait lutter ensemble des rivaux de toutes les parties de la France. Vous serez d'abord interrogés sur les *Mathématiques;* elles forment la base de l'instruction requise pour être admis à l'Ecole Polytechnique; elles sont l'instrument nécessaire à tous ceux qui se destinent aux services publics. L'etude des élémens aura suffi pour vous donner une idée des nombreuses applications que l'on peut faire de cette belle science, dont les propriétés sont si universelles, qu'elles semblent participer de celles de l'étendue qu'elle mesure.

La *Géométrie* aura, la première, fixé votre attention; elle vous aura intéressés par la variété de ses combinaisons et l'évi-

dence de ses découvertes, qui est telle, que quelquefois, sans doute, vous vous serez étonnés de ne les avoir pas faites vous-mêmes sans le secours de la science. En effet, tout ce qu'elle vous a révélé étoit en vous. Nous naissons tous géomètres. Ceux qui obtiennent ce titre n'ont d'autre avantage que d'avoir exercé leur esprit à reconnoître et rassembler toutes les notions que nous possédons sur l'étendue. Mais le génie qui guide dans les démonstrations appartient tout entier à la science. Vous aurez remarqué cette singularité, que la géométrie, cette science des corps, opère continuellement sur des abstractions; elle assemble, elle divise, elle combine des idéalités; et la nature physique, qui est passive., semble obéir à ses calculs, tant l'application de ses découvertes est rigoureuse. C'est cet esprit d'abstraction par excellence qui faisoit dire à Pascal, que *toute la puissance de l'esprit se montroit dans la première page d'un livre de géométrie.* C'est sans doute aussi dans ce sens qu'il faut entendre ce qu'on nous raconte de l'enthousiasme de cet ancien, à la vue de quelques figures géométriques tracées sur le rivage d'une île étrangère.

Vous avez ouï parler, jeunes Elèves, de l'enthousiasme de cet autre géomètre qui, pour soulever le globe entier, ne demandoit qu'un point d'appui. La partie de la *Statique*, que vous avez vue jusqu'à ce jour, a suffi pour vous expliquer la pensée de ce philosophe. Cette étude vous servira d'introduction à celle de la *Mécanique*, et vous marcherez de prodiges en prodiges.

Une autre branche des mathématiques, qui fut long-temps inconnue, long-temps aride et négligée, et qui, dans le siècle dernier, sembla recevoir une création nouvelle, tant ses procédés furent simplifiés et ses applications multipliées, l'*Algèbre*, a dû aussi faire partie de vos études. L'algèbre, cet appui de l'esprit de recherche, a doublé ses forces dans toutes les carrières où elle l'a guidé; aussi aujourd'hui toutes les barrières sont-elles tombées devant elle. Il n'est pas une branche des mathématiques qui n'ait reçu son application, et elles se sont toutes agrandies par ses calculs. Elle a prêté ses formules et sa rigoureuse exactitude aux sciences physiques. Depuis ce moment, elles ne s'égarent plus. La subtile métaphysique elle-même a souvent emprunté son langage et son appui. Heureuse, si ses débiles mains lui permettoient de porter ce fil à travers tous les dédales où elle s'engage!

L'algèbre est remarquable par l'étendue de ses recherches; elle ne l'est pas moins par les procédés qu'elle emploie. Vous avez pénétré dans l'esprit de ces équations algébriques, qui n'offrent à la pensée que des traductions diverses d'un même énoncé,

et dont la dernière, cependant, contient la solution cherchée. La première fois que vous les employâtes, vous dûtes être surpris de la puissance de la science, en la voyant s'emparer de l'inconnue, la traiter comme une quantité positive, la soumettre à ses opérations, et après des combinaisons plus ou moins longues, la forcer de se révéler elle-même. Vos jeunes imaginations ne se rappeloient-elles pas alors ce géant de la fable, qui, vaincu, altéré, n'avouoit son nom et sa nature qu'après avoir pris mille formes diverses pour échapper à son vainqueur?

J'aime à vous parler, jeunes Elèves, la langue de vos études; j'aime à parer mes discours des couleurs de l'antiquité : elles plaisent à la jeunesse; elles sont brillantes comme les pensées de cet âge. Vous n'y êtes point étrangers, puisque les belles-lettres ont dû faire partie de vos études; elles auront eu de l'attrait pour vous. Les jeunes mathématiciens comptent ordinairement pour des heures de récréation le temps qu'ils leur consacrent. Ah! conservez toute votre vie le goût des lettres, ce goût de toutes les jouissances de l'esprit; et puisque la langue de Cicéron doit vous être familière, apprenez par cœur l'éloge qu'il en fait. Il a révélé la pensée de tous ceux qui, dans tous les siècles et dans tous les pays, les ont cultivées et leur ont dû les momens les plus heureux de leur vie.

Je ne vous parle pas de l'obligation où vous êtes d'écrire correctement la langue française; il est si honteux d'ignorer sa propre langue, que je vous ferois injure en regardant comme une difficulté l'examen que vous devez subir à ce sujet.

Le *Dessin*, qui est une extension du langage, ou au moins un supplément à l'art de peindre la pensée, le dessin fait encore partie des études de l'Ecole Polytechnique. Son étude est utile, et peut-être trop négligée dans toutes les conditions de la société. Elle est indispensable et exigée dans celle que vous embrassez.

Voilà, jeunes Elèves, le cercle dans lequel seront renfermés les Examens que vous allez subir. Il est vraisemblable que, dans le nombre de ceux qui se présentent cette année au Concours, tous ne seront pas admis. Que ceux à qui la palme aura été refusée, ne voient, dans cette circonstance, qu'une raison pour redoubler de travail, afin de se présenter avec plus d'avantage aux examens de l'année prochaine.

Ceux qui auront mérité le suffrage de M. l'Examinateur auront la perspective prochaine d'entrer au service de l'Etat. Cette nouvelle destination leur imposera de nouveaux devoirs, et doit appeler leur attention sur des objets plus sérieux que ceux qui les ont occupés jusqu'à ce jour. Qu'ils ne perdent jamais de vue que, dans la carrière où ils sont près d'entrer, et sous le

règne du grand Prince qui nous gouverne, il n'est qu'un moyen de s'avancer, qu'une seule voie ouverte à l'ambition : c'est celle de l'honneur, de la probité, des bons et loyaux services. Toute autre route égare et perd ceux qui la suivent. Que cette vérité soit la règle constante de toutes vos actions. Jeunes gens, si dans le monde vous entendiez d'autres maximes, si l'on vous citoit des succès obtenus par l'intrigue, ou des services restés sans récompense, méfiez-vous de ces exemples; méfiez-vous même de ceux qui les débitent. Se montrer morose et frondeur à l'époque où nous vivons, c'est perdre tout crédit auprès des ames généreuses et des cœurs sensibles à la gloire.

Sans sortir de l'enceinte de l'Ecole où vous allez habiter, vous trouverez dans celui qui la gouverne, et vous aurez continuellement sous les yeux, un exemple de la considération personnelle, de la fortune et des dignités qui peuvent devenir la récompense d'une vie toujours pure, toujours active, et toute consumée dans d'utiles travaux. Cet exemple vivant parlera plus haut que mes discours, et je m'en félicite.

Préparez-vous donc avec ardeur à votre nouvel état; soyez toujours fidèles à l'honneur, et prospérez sous le règne du Graud Napoléon ; c'est la plus noble ambition qui puisse faire battre vos jeunes cœurs !

---

§. VI. ACTES DU GOUVERNEMENT.

Au Palais des Tuileries, le 30 *Janvier* 1809.

NAPOLÉON, Empereur des Français, Roi d'Italie, et Protecteur de la Confédération du Rhin ;

Sur le rapport de notre Ministre de la Guerre, notre Conseil-d'Etat entendu,

Nous avons décrété et décrétons ce qui suit :

Art. Ier. Les Ingénieurs-Géographes sont organisés en corps militaire qui portera le nom de *Corps Impérial des Ingénieurs-Géographes.*

Art. II. Il sera dans les attributions du Ministère de la Guerre, et aura pour chef l'officier-général, directeur du dépôt de la guerre.

Art. III. Le nombre des Ingénieurs-Géographes sera de quatre-vingt-dix.

SAVOIR :

4 Colonels,
8 Chefs d'Escadron,
24 Capitaines de 1re. classe,
24 Capitaines de 2e. classe,
24 Lieutenans,
6 Elèves, sous-lieutenans, au moins.

90

Art. IV. Les Ingénieurs-Géographes jouiront, dans leurs grades respectifs, de la solde accordée par les lois aux officiers du Génie.

Art. V. Ils auront aussi droit, dans leurs grades respectifs, aux indemnités et retraites de tout genre qui sont accordés aux officiers de l'état-major, d'après les formes et dans les cas déterminés par les lois et les réglemens militaires.

Art. VI. Les places vacantes dans le corps seront données à des élèves de l'Ecole Polytechnique, conformément à la loi du 25 frimaire an 8.

Art. VII. Les Ingénieurs-Géographes en campagne ou sur le terrain, jouiront d'un traitement supplémentaire qui sera fixé par le Ministre de la Guerre, et qui servira à subvenir aux frais de chaîneurs et réparations des instrumens usuels.

Art. VIII. Le nombre des colonels et chefs d'escadron composant le corps provisoire des Ingénieurs-Géographes étant supérieur à celui qui est fixé par le présent décret, les titulaires actuels conserveront leur grade et leur traitement, mais en déduction du nombre des officiers du grade inférieur.

Art. IX. Les Ingénieurs-Géographes conserveront l'uniforme qui leur a été donné.

Art. X. Notre Ministre de la Guerre est chargé de l'exécution du présent décret.

Signé NAPOLÉON.

Au Palais des Tuileries, le 7 février 1809.

NAPOLÉON, Empereur des Français, Roi d'Italie, et Protecteur de la Confédération du Rhin.

Sur le rapport du Ministre de l'Intérieur, notre Conseil-d'Etat entendu, nous avons décrété et décrétons ce qui suit :

Art. Ier. La petite rue Clopin, qui communique de la rue Bordet à celle des Fossés-St.-Victor, sera supprimée dans toute la partie qui sépare l'ancien collége de Boncours, du ci-devant collége de Navarre, depuis la rue Bordet jusqu'à l'angle de la maison n°. 6 de la même rue Clopin. Le terrain de la rue fera partie de l'enceinte de l'Ecole, afin d'opérer la réunion des bâtimens et terrains de ces deux colléges, maintenant affectés à l'Ecole impériale Polytechnique. La rue Bordet portera désormais le nom de rue *Descartes*.

Art. II. La nouvelle rue Clovis, ouverte sur l'emplacement de l'ancienne église Ste.-Geneviève, sera prolongée depuis la rue Descartes jusqu'à celle des Fossés-St.-Victor, en remplacement de celle Clopin, supprimée par l'article 1er, et confor-

mément au plan approuvé par notre Ministre de l'Intérieur le 31 mai 1807, lequel restera joint au présent décret. En conséquence on prendra à cet effet la partie nécessaire de la maison appartenant au Collége des Irlandais, à estimation, selon la loi du 16 septembre 1807, sans que le sieur Pélissier, locataire, puisse intervenir à ladite estimation, ni prétendre aucune indemnité du Gouvernement, attendu que l'exercice de ses droits ne peut exister que contre le propriétaire.

Art. III. L'Administration de l'Ecole Impériale Polytechnique est autorisée à acheter, dans les formes prescrites par la loi du 16 septembre 1807, les bâtimens et terrains dépendans de l'ancien collége de Boncours, qui ont été aliénés, et qui seront reconnus par notre Ministre de l'Intérieur être nécessaires pour la clôture et l'isolement de cette Ecole.

Art. IV. Les portions de l'ancien collége de Boncours, réunies à l'Ecole impériale Polytechnique par notre décret du 3 mars 1806, et tous autres terrains provenant d'acquisition, qui se trouveront au-delà de la nouvelle rue Clovis, pourront être aliénés, s'il est reconnu qu'ils soient inutiles au service de l'Ecole; et dans ce cas le prix en sera employé au paiement des propriétaires qui se trouveront dépossédés par suite des dispositions ordonnées par le présent décret.

Art. V. L'arrêté du conseil de préfecture du 25 mai 1808, qui fixe l'indemnité à accorder au sieur Jacquet pour indemnité d'une partie de sa maison, est confirmé.

Toutefois l'administration de l'Ecole est autorisée à traiter avec le sieur Jacquet, avec l'autorisation de notre Ministre de l'Intérieur, pour faire faire à la maison dont partie sera démolie, soit la reconstruction du mur abattu, soit tels autres arrangemens en compensation et pour tenir lieu de l'indemnité.

Art. VI. L'administration de l'Ecole pourra également acquérir pour la circonscription de sa clôture et l'isolement de son bâtiment et ouverture de fenêtres, les maisons ou masures, rue Montagne Ste.-Geneviève, n°s. 51, 53, 67, 69 et 73; rue Bordet, les maisons n°s. 1, 3, 5, 11 et 13; rue Traversine, les maisons n°s. 28, 30, 32, 34 et 36; et cul-de-sac Bonpuits, les maisons n°s. 23, 24 et 25.

Art. VII. Pour compléter la réunion du collége de Navarre à celui de Boncours, l'administration de l'Ecole est également autorisée à acquérir les maisons situées rue Clopin, n°s. 1, 3, 5, 7 et 9.

Art. VIII. Les acquisitions susdites auront lieu successi-

vement, sur l'autorisation de notre Ministre de l'Intérieur, et seront payées avec les fonds déjà alloués et qui seront accordés par nous à cet effet, ou sur ceux qui resteront disponibles sur ceux annuellement accordés pour l'École Polytechnique.

ART. IX. Notre Ministre de l'Intérieur est chargé de l'exécution du présent décret.

Signé NAPOLÉON.

Dans le courant de février 1809, Sa Majesté l'Empereur a conféré le grand-cordon de la Légion-d'Honneur à S. Exc. M. le Ministre d'État, Gouverneur de l'École Polytechnique.

CORRESPONDANCE
SUR
L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
Rédigée par M. Hachette.

N°. II. *Janvier* 1810. (2e. vol.)

§. Ier.

ANALYSE

Sur les Équations différentielles des Courbes du second degré;

Par M. Monge.

L'équation aux différences premières ordinaires à la ligne droite est toujours de la forme $\left(faisant\ \frac{dy}{dx} = p.\right)$

$$F(y - px, p) = 0$$

et son intégrale se trouve en mettant dans cette équation la constante arbitraire a à la place de p, c'est-à-dire que l'intégrale complète est

$$F(y - ax, a) = 0.$$

Ce seroit, je pense, une entreprise inutile de chercher de semblables résultats pour les courbes des différens degrés, principalement parce qu'à l'inspection d'une équation différentielle on ne peut reconnoître si elle appartient à une courbe algébrique, ni de quel degré est cette courbe. Mais les courbes du second degré sont si simples, et se présentent si fréquemment dans la nature, qu'il peut être de quelqu'utilité de le faire pour elles.

L'équation générale des courbes du second ordre est de la forme

$$(A) \quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0$$

et contient les cinq constantes A, B, C, D, E. Si l'on différencie cette équation cinq fois consécutives, pour arriver aux dif-

férences du cinquième ordre, on aura cinq nouvelles équations, entre lesquelles et (A), on peut éliminer les cinq constantes considérées comme arbitraires. Et en faisant

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{dp}{dx}=q,\quad \frac{dq}{dx}=r,\quad \frac{dr}{dx}=s,\quad \frac{ds}{dx}=t,$$

on trouve pour équation générale, délivrée de toutes les constantes :

$$(B)\qquad 9q^2t-45qrs+40r^3=0;$$

c'est cette équation qui appartient à toutes les courbes du second degré, et qui les exprime toutes, quelles que puissent être les cinq constantes.

Cela posé, soit proposée une équation aux différences ordinaires, qui n'excède pas le quatrième ordre : il est facile de reconnoître si elle appartient à une courbe du deuxième degré : pour cela, il suffit de la différencier successivement jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux cinquièmes différences, et de s'assurer si la proposée, au moyen de ses différentielles, satisfait à l'équation générale (B). Si cela a lieu, la proposée appartient en effet à une courbe du second degré, et son intégrale complète est l'équation (A) dans laquelle il y a autant de constantes de trop qu'il a fallu différencier de fois pour arriver aux cinquièmes différences ; il faut donc déterminer les constantes surnuméraires pour que l'intégrale ne soit plus l'équation de toutes les sections coniques, mais seulement celle des sections coniques auxquelles appartient la proposée.

Pour cela, il faut différencier l'intégrale (A) plusieurs fois successivement, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'ordre de la proposée; ensuite, au moyen de ces différentielles successives, éliminer de la proposée toutes les quantités $p, q, r,\ldots$ etc. ; il ne restera plus qu'une équation en $x.y.A.B.C.D.E$, et il faudra trouver entre les cinq constantes les relations qui satisferont à cette équation. Sur quoi il faut observer que si cette équation avoit plusieurs facteurs, le facteur utile sera celui qui, pour devenir nul par lui-même, exigera précisément le nombre de relations entre les constantes, égal au nombre des constantes surnuméraires.

Exemple :

L'équation générale des cercles est $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, dont la différentielle délivrée des trois constantes et du troisième ordre est :

$$(C)\qquad (1+p^2)r=3pq^2.$$

Pour s'assurer si cette équation, considérée comme la pro-

posée, appartient à une section conique, il faut les différencier deux fois de suite; ce qui donne :

$$(1+p^2)^2\, s = 3\, q^3\, (1+5p^2)$$
$$(1+p^2)^3\, t = 15\, p\, q^4\, (3+7p^2),$$

et substituer dans l'équation du cinquième ordre (B) les valeurs de r, s, t. Or, par cette substitution l'équation (B) est satisfaite donc la proposée appartient à une section conique et a pour intégrale l'équation.

$$(A) \quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0$$

qui contient deux constantes de trop; il faut donc trouver entre les cinq constantes deux relations.

Pour cela il faut différencier trois fois consécutives l'équation (A); la première différenciation donne :

$$p\{Ay + Bx + D) + By + Cx + E = 0$$

qui, faisant pour abréger, $Ay + Bx + D = M$

et $By + Cx + E = N$,

devient $p = \dfrac{-N}{M}$

différenciant ensuite, on a :

$$q = -\frac{(AN^2 - 2BMN + CM^2)}{M^3}$$

$$r = -\frac{3(AN^2 - 2BNM + CM^2)(AN - BM)}{M^5}$$

Si l'on substitue les valeurs de p, q, r, dans la proposée (C), on a l'équation suivante, qui est composée de trois facteurs :

$$M\{AN^2 - 2BMN + CM^2\}\{B(M^2 - N^2) + MN(C - A)\} = 0$$

Or, de ces trois facteurs, les deux premiers ne sont pas utiles; en effet, le premier, M, c'est-à-dire $Ay + Bx + D$ ne peut devenir nul par lui-même, à moins que l'on ait $A=0$, $B=0$, $D=0$, ce qui fait trois relations; tandis qu'il n'en faut que deux.

Le second, $AN^2 - 2BMN + CM^2$ ne peut devenir nul, à moins que l'on ait $A=0$, $B=0$, $C=0$, ce qui fait également trois relations; et si dans le même facteur on faisoit $M=0$, $N=0$, il faudroit que toutes les constantes fussent nulles chacune en particulier.

Il n'y a donc que le troisième facteur qui devient nul au moyen des deux relations suivantes :

$$B = 0$$
$$C = A$$

Ce sont les valeurs qu'il faut substituer dans l'intégrale générale (A) pour avoir l'intégrale propre de la proposée ; intégrale qui devient :

$$A(y^2+x^2)+2Dy+2Ex+1=0$$

et qui appartient au cercle quelconque, ainsi qu'il est facile de le reconnoître, en faisant :

$$\left.\begin{array}{l} A=\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2} \\ E=\dfrac{-b}{a^2+b^2-c^2} \\ D=\dfrac{-a}{a^2+b^2-c^2} \end{array}\right\}$$ a, b, c étant trois autres constantes arbitraires.

Cette équation devient :

$$y^2+x^2-2(ay+bx)+a^2+b^2-c^2=0$$

ou : $$(y-a)^2+(x-b)^2=c^2$$

GÉOMÉTRIE.

Explication des Phénomènes d'optique, qui résultent du mouvement de la Terre ; et Notions d'Astronomie sur lesquelles est fondée l'application de la Géométrie descriptive à l'Art de construire les Cadrans,

Par M. HACHETTE.

§. Ier.

Du Soleil.

(1) Le soleil est un corps lumineux, de forme sphérique ; l'angle sous lequel on le voit de la terre, est variable ; le plus grand est de 32′ 35″, 5 ; le plus petit est de 32′ 0″ 3 (division sexagésimale) ; on nomme cet angle *diamètre apparent* du soleil ; le diamètre réel est de 142083 myriamètres ; le volume du soleil est 1384462 fois plus grand que celui de la terre.

Le centre du soleil est fixe ; il tourne autour d'un axe, et la durée d'une révolution entière est d'environ 25 jours 1/2.

De la Terre.

(2) La terre est un corps opaque, dont la surface est irrégulière, et dont la masse est d'une forme qu'on a comparée à celle de deux corps réguliers, la sphère, et l'ellipsoïde de révolution; la sphère terrestre a pour diamètre 1273 myriamètres; le grand axe de l'ellipsoïde terrestre est de 1275 myriamètres; le petit axe est de 1271 myriamètres.

(3) Le centre de la terre décrit une courbe autour du soleil, et on a d'abord supposé que cette courbe étoit un cercle, qu'on a nommé *écliptique;* le rayon de l'écliptique est de 15287873 myriamètres; la théorie et l'observation ont appris que le soleil est au foyer d'une ellipse qui diffère moins que le cercle de la courbe décrite par le centre de la terre; les distances du soleil aux extrémités du grand axe de cette ellipse sont exprimées en myriamètres par les nombres 15544709 et 15031037; elles diffèrent du rayon de l'écliptique en plus et en moins de la cent-soixante-huit dix millième partie de la valeur de ce rayon.

(4) La durée d'une révolution entière du centre de la terre est de 365 jours (moyens) 5 heures 48′ 51″. On nomme cette période, *l'année.*

(5) La terre a un mouvement de rotation autour d'un axe; cet axe ne change pas sensiblement de direction en une année; la révolution de la terre autour de son axe se fait en 23,9344 heures; on n'a encore observé aucune irrégularité dans ce mouvement.

(6) Chaque point de la surface de la terre décrit une courbe; la force à laquelle il est sonmis à chaque instant est la résultante de deux autres forces, l'une parallèle *à l'équateur terrestre,* et l'autre parallèle à l'écliptique; on nomme *équateur terrestre* le grand cercle de la terre dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la terre; on appelle *méridien* d'un lieu le grand cercle qui passe par ce lieu et par l'axe de la terre.

(7) Le plan de l'équateur solaire, ou du plan perpendiculaire à l'axe de rotation du soleil, fait avec le plan de l'écliptique un angle de 7° $\frac{1}{2}$.

(8) La lumière du soleil parcourt le rayon de l'écliptique en 0 heure 8′ 13″, 3; dans le même temps, le centre de la terre parcourt sur l'écliptique un arc de 125″ (division décimale) ou 20″, 25 (division sexagésimale); d'où l'on conclut que la vîtesse de la lumière est 10313 plus grande que celle du centre de la terre sur l'écliptique.

(9) Nous allons faire, pour l'explication des phénomènes d'optique dus au mouvement de la terre, trois hypothèses qui ne changent pas sensiblement ces phénomènes; nous supposerons 1°. que la terre est une sphère parfaite, et que son centre décrit un cercle autour du soleil comme centre; 2°. que le soleil est à une assez grande distance de la terre, pour que, dans un instant donné, on puisse considérer tous les rayons de lumière qu'il envoie vers la terre, comme parallèles entre eux; 3°. enfin, que le centre de la terre est fixe, tandis que cette planète tourne autour de son axe; on suppose qu'après chaque révolution, le centre de la terre parcourt instantanément l'arc de l'écliptique, qu'il a réellement parcouru pendant la révolution entière; d'après cette dernière hypothèse, un point déterminé de la surface de la terre décrit toujours le même cercle autour de l'axe de la terre, tandis que cet axe est transporté parallèlement à lui-même, de manière que le point-milieu de cet axe parcourre l'écliptique.

§. II.

De l'inégalité du Jour et de la Nuit.

(10) Le centre de la terre parcourt dans une année le cercle de l'écliptique, et l'axe de la terre décrit dans le même temps une surface cylindrique, dont ce cercle est la base.

(11) Supposons l'axe de la terre projetté dans chacune de ses positions sur le plan de l'écliptique; toutes les droites projections de cet axe seront parallèles entre elles, et deux de ces droites seront tangentes au cercle de l'écliptique; considérons d'abord le centre de la terre dans l'un ou l'autre des points où l'écliptique est touché par ces deux droites, *le jour est alors pour tous les lieux de la terre de même durée que la nuit.* En effet, la ligne de séparation du jour et de la nuit est un grand cercle de la sphère terrestre, dont le plan est perpendiculaire à la droite qui unit le centre de la terre et le centre du soleil; or, le plan de ce grand cercle divise en deux parties égales l'équateur terrestre et tous ses parallèles : donc, quelle que soit la latitude d'un lieu, ou le parallèle sur lequel il est placé, ce parallèle sera divisé en deux parties égales par la ligne de séparation du jour et de la nuit : donc, pour un lieu quelconque, le jour est de même durée que la nuit; les deux époques de l'année auxquelles cette égalité a lieu se nomment *équinoxes.* Le centre de la terre, à ces deux époques, est placé aux points extrêmes d'un diamètre de l'écliptique; ces points se nomment *nœuds*, et le diamètre dont

ils sont les extrémités, *ligne des nœuds*; l'intersection du plan de l'écliptique et de l'équateur terrestre est constamment parallèle à cette ligne.

(12) L'axe de la terre, considéré dans une position quelconque, autre que celle qui correspond aux équinoxes, se projette sur le plan de l'écliptique, suivant une corde de ce cercle; ce grand cercle de séparation du jour et de la nuit se projette sur le même plan de l'écliptique, suivant la tangente à l'écliptique menée par le point milieu de l'axe de la terre, qui est le centre de cette planète; or, il est évident que le plan du grand cercle qui sépare le jour de la nuit, divise en parties égales l'équateur, et en parties inégales les parallèles à l'équateur; donc, pour tous les lieux situés sur l'équateur, le jour est constamment égal à la nuit, et pour les lieux situés sur un parallèle quelconque à l'équateur, le jour et la nuit sont inégaux; cette inégalité est à son *maximum* lorsque le centre de la terre arrive aux points de l'écliptique, pour lesquels la projection de l'axe de la terre sur l'écliptique se confond avec un diamètre de ce cercle; cette coïncidence a lieu deux fois dans l'année, à deux époques qu'on nomme *solstices*.

PROBLÊME.

Étant donnée la position de l'axe de la terre pour une époque déterminée de l'année, trouver le parallèle à l'équateur qui soit à cette époque la limite des parallèles en partie éclairés par le soleil et en partie dans l'ombre, en sorte qu'il soit lui-même tout entier dans l'ombre, ou tout entier dans le jour?

Solution.

(13) Le parallèle demandé, et le grand cercle de séparation du jour et de la nuit correspondant à l'époque déterminée, doivent évidemment avoir pour tangente commune la droite intersection des plans des deux cercles; car, si les deux cercles se coupoient, une partie du parallèle seroit dans la nuit et l'autre dans le jour; s'ils ne se coupoient pas et qu'ils ne fussent pas tangents, le parallèle ne seroit pas une limite suivant la condition du problême; donc, les deux cercles ont une tangente commune : d'où il suit qu'un cône droit qui a pour base le parallèle cherché et pour sommet le centre de la terre, est touché par le plan du cercle de séparation du jour et de la nuit; donc, si l'on fait tourner le plan de ce cercle autour de l'axe de la terre, l'enveloppe de l'espace parcouru par ce plan sera la surface d'un cône droit, qui a pour base le parallèle demandé; donc, l'inter-

section de ce cône et de la sphère terrestre sera le parallèle cherché. Prenant le rayon de l'écliptique pour le rayon des tables, le sinus de la latitude de ce parallèle a pour expression :

$$\sqrt{1 - \sin.^2 E \sin.^2 L}$$

E étant l'inclinaison du plan de l'équateur terrestre par rapport à l'écliptique, et *L* la *longitude du soleil.*

De la longitude du Soleil.

(14) Considérant le rayon de la terre comme nul par rapport à la distance de cette planète au centre du soleil, un habitant quelconque de la terre ne peut voir le centre du soleil que dans la direction d'un rayon de l'écliptique; et comme il suppose qu'il est fixe au centre de l'écliptique, il se trompe sur la position réelle du soleil, il le voit dans le prolongement du rayon de l'écliptique qui unit les centres de la terre et du soleil, à une distance égale à ce rayon; d'où il suit que connoissant la position réelle du centre de la terre sur l'écliptique, tous les habitans de cette planète ne peuvent voir le soleil qu'à l'extrémité du diamètre de l'écliptique qui correspond à la position donnée du centre de la terre.

(15) A l'un des équinoxes, le centre de la terre est à une extrémité de la ligne des nœuds (11), et le lieu apparent du soleil est à l'autre extrémité de cette ligne; ce lieu apparent est l'origine des arcs de l'écliptique qu'on nomme *longitudes* du soleil; la longitude du soleil, un jour quelconque de l'année, est un arc de l'écliptique qui détermine pour ce jour le lieu apparent de cet astre; cet arc est égal et opposé à l'arc qui mesure l'angle que la ligne des nœuds fait avec le rayon de l'écliptique qui passe ce même jour par le lieu réel du centre de la terre.

Aux équinoxes, la longitude du soleil est 0° ou 180°; aux solstices, elle est égale à 90°; l'expression du sinus trouvée art. 13, fait voir que pour ces valeurs de la longitude *L*, ce sinus devient 0° et cos. *E*, comme il est facile de le vérifier sur une figure. Pour trouver l'expression générale de ce sinus, j'ai supposé l'axe de la terre projeté sur le plan du grand cercle de séparation du jour et de la nuit; l'angle de cette projection avec l'axe même est le complément de la latitude du parallèle à l'équateur, limite des parallèles qui sont tout entiers dans l'ombre de la terre ou dans la lumière du soleil. L'axe de la terre, la projection de l'axe de la terre sur le plan du grand cercle de séparation d'ombre et de lumière, la droite intersection de ce plan et du plan mené par l'axe de la terre perpendiculairement à l'écliptique, forment

une pyramide triangulaire, dont on connoît deux faces et l'angle compris; la face opposée à ce dernier angle est le complément de la latitude du parallèle, dont on calcule le sinus par l'expression de l'article 13.

Du lever et du coucher des Astres; de leur passage au Méridien.

(16) Tandis que la terre fait une révolution sur son axe, l'horizon d'un point quelconque de la surface de cette planète se meut; et si on suppose le centre de la terre fixe pendant cette révolution, l'enveloppe de l'espace que l'horizon parcourt est un cône droit, dont l'axe se confond avec celui de la terre; ce cône est le même pour tous les lieux situés sur un parallèle à l'équateur; l'angle de l'une de ces arêtes avec l'axe de la terre est égal à la latitude du lieu auquel il correspond; un astre se lève ou se couche pour un lieu donné sur la terre, lorsque le plan de l'horizon de ce lieu passe par l'astre.

(17) On nomme (5) *méridien* un plan qui passe par l'axe de la terre, tandis que la terre tourne sur son axe; le méridien d'un lieu déterminé de cette planète tourne autour du même axe; quel que soit l'angle compris entre ce méridien et un autre méridien passant par un astre qui est fixe ou mobile dans une orbite donnée, il y aura un instant où ces deux méridiens se confondront; cet instant est celui du *passage* de l'astre au méridien du lieu déterminé de la surface de la terre.

PROBLÊME.

Étant donnée la position d'un lieu sur la terre, et connoissant la position du centre de la terre sur l'écliptique, on demande l'instant du passage d'un astre fixe, tel que le soleil ou une étoile, au méridien du lieu dont la position est donnée?

(18) La position d'un lieu étant donnée, l'enveloppe de l'espace que parcourt l'horizon de ce lieu, en tournant autour de l'axe de la terre, est déterminé; donc si on mène par l'astre considéré comme un point deux plans tangens à ce cône, la position de ces deux plans détermine celle de l'horizon correspondant au lever et au coucher de l'astre.

(19) Les étoiles situées dans l'intérieur du cône droit (16) touché par l'horizon d'un lieu, sont toujours visibles de ce lieu; celles qui sont situées dans l'intérieur du prolongement de ce cône sont toujours invisibles pour ce même lieu.

De la hauteur des Astres.

(20) La *hauteur* d'un astre est l'angle que l'horizon d'un lieu fait avec la droite menée de ce lieu au centre de l'astre; cette droite fait avec la verticale du même lieu un angle qui est le complément de la hauteur; à chaque révolution de la terre sur son axe, la verticale d'un lieu qui tourne autour de ce même axe engendre (9) un cône droit dont les arètes font avec les droites menées du lieu qu'on considère, vers un astre, des angles qui sont les complémens des hauteurs variables de cet astre.

De la Longitude et de la Latitude d'un Astre; de son Ascension droite, et de sa Déclinaison.

(21) Si par la ligne des nœuds (11) on conçoit un plan parallèle à l'équateur terrestre, et dans ce plan un cercle de même centre que l'écliptique, on nomme ce dernier cercle *équateur céleste :* ces deux cercles se coupent en deux points, qu'on appelle *nœuds* (11). Chacun d'eux a un axe, c'est-à-dire une droite passant par le centre du cercle, perpendiculaire au plan qui contient ce cercle.

(22) Un astre étant donné, on mène par cet astre et par les axes de l'écliptique et de l'équateur céleste deux plans, qui coupent ces cercles chacun en un point : l'arc compris entre le point de l'écliptique et un des nœuds est la *longitude* de l'astre; l'arc compris entre le point de l'équateur et le même nœud en est *l'ascension droite ;* l'angle que la droite menée par l'astre et le centre de l'écliptique fait avec le plan de ce cercle se nomme *latitude ;* l'angle que cette même droite fait avec le plan de l'équateur céleste s'appelle *déclinaison*. Les angles que cette même droite fait avec les axes de l'écliptique et de l'équateur céleste, sont les complémens de la latitude et de la déclinaison.

Du Mouvement apparent d'un point déduit du Mouvement réel de ce point; et des Mouvemens réels et apparens de l'œil d'un spectateur.

(23) Un point se meut sur une courbe, et l'œil d'un spectateur qui l'observe parcourt en même temps une autre courbe; les positions correspondantes de l'œil et du point sur ces deux courbes étant données, désignons-les par les lettres a et b,

a' et b', a'' et b'', etc., ensorte que l'œil du spectateur soit aux points a, a', a''; etc., tandis que le point mobile se trouve en b, b', b'', etc. sur la ligne qu'il parcourt : et représentons par $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$ les droites qui unissent deux à deux les points correspondans des deux courbes $a\,a'\,a''$...., $b\,b'\,b''$, etc; le systême de ces droites appartient à une surface courbe qui est évidemment le lieu du mouvement réel du point observé et de l'œil de l'observateur considéré comme un autre point : le mouvement apparent de l'œil étant connu, nommons c, $c'\,c''$, ses positions apparentes correspondantes aux positions réelles a, a', a''....; ayant mené par les points c, c', c''.... des droites égales et parallèles aux droites $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$, la courbe qui unit les extrémités d, d', d''.... de ces parallèles est la courbe demandée; c'est sur cette courbe $d\,d'\,d''$.... que le point qui décrit réellement la ligne $b\,b'\,b''$...., paroît se mouvoir.

(24) Lorsque le spectateur suppose qu'il est en repos, la courbe $c\,c'\,c''$.... se réduit à un point; la surface formée des lignes droites cd, $c'd'$, $c''d''$.... devient un cône, et la courbe $d\,d'\,d''$ décrit en apparence par le point mobile, est une ligne tracée sur la surface de ce cône.

(25) Les mouvemens réel et apparent de l'œil d'un spectateur restant les mêmes, supposons qu'un second point mobile, vu en même temps que le premier, décrive une courbe B, B', B''... On formera deux nouvelles surfaces, l'une composée des droites aB, $a'B'$ $a''B''$...., l'autre des droites cD, $c'D'$, $c''D''$...., la première est le lieu des courbes réellement décrites $a\,a'\,a''$..., $B\,B'\,B''$.... par l'œil de l'observateur et par le point observé; la deuxième contient les courbes $c\,c'\,c''$...., $D\,D'\,D''$... du mouvement apparent de ces mêmes points; quel que soit l'angle réellement compris entre les droites ab, aB dirigées de l'œil du spectateur vers les deux points b et B, l'angle apparent de ces mêmes droites est compris entre leurs parallèles cd, cD; donc, quel que soit le mouvement réel et apparent de deux points et de l'œil d'un spectateur qui les observe, les angles apparens des rayons visuels dirigés en même temps vers ces points, sont égaux aux angles réels formés par ces mêmes rayons.

Du Mouvement apparent du Soleil, considéré comme un point lumineux.

(26) La droite qui unit le centre de la terre et celui du soleil, fait avec l'axe de la terre un angle qui dépend de la position du centre de la terre sur l'écliptique; nommons cet angle D' :

En retranchant la première de ces équations des trois autres, on obtient :

$$r-r'=\rho'-\rho, \quad r-r''=\rho''-\rho, \quad r-r'''=\rho'''-\rho;$$

ou en faisant, pour abréger

(1) $r-r'=2d, \quad r-r''=2d', \quad r-r'''=2d'',$

(2) $\rho'=\rho+2d, \quad \rho''=\rho+2d', \quad \rho'''=\rho+2d''.$

Mais on a d'un autre côté :

$$(3)\begin{cases} \rho'^2=\rho^2+4a^2-4a\rho\cos(\rho,a), \\ \rho''=\rho^2+4b^2-4b\rho\cos(\rho,b), \\ \rho'''^2=\rho^2+4c^2-4c\rho\cos(\rho,c). \end{cases}$$

Égalant ces valeurs aux carrés des équations (2), on trouve :

$$(4)\begin{cases} \rho\{a\cos(\rho,a)+d\}=a^2-d^2, \\ \rho\{b\cos(\rho,b)+d'\}=b^2-d'^2, \\ \rho\{\cos(\rho,c)+d''\}=c^2-d''^2. \end{cases}$$

Ces trois équations représentent trois hyperboloïdes de révolution à deux nappes, ayant un foyer commun au centre de la première sphère donnée, et pour axes de révolution les droites joignant le centre de cette sphère à ceux des trois autres.

d, d', d'' sont les demi-premiers axes de ces hyperboloïdes, et a, b, c, les distances de leurs centres aux foyers. Les intersections communes de ces trois surfaces donnent la solution du problême. Mais nous allons voir qu'on n'a pas besoin de construire ces hyperboloïdes, et que la construction du problême peut s'exécuter avec la règle et le compas.

En effet, en éliminant ρ entre les équations (4), on obtient les trois équations suivantes, dont deux quelconques comportent la troisième :

$$(5)\begin{cases} \left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)\cos(\rho,a)-\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)\cos(\rho,b)=\frac{d'}{b}\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right) \\ \left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)\cos(\rho,b)-\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)\cos(\rho,c)=\frac{d''}{c}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)-\frac{d'}{b}\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right) \\ \left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)\cos(\rho,c)-\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)\cos(\rho,a)=\frac{d}{a}\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)-\frac{d''}{c}\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right) \end{cases}$$

Chacune de ces équations représente un cône droit, ayant son sommet au centre de la première sphère donnée. Leurs intersections deux à deux fourniront deux droites, qui détermineront deux positions différentes de ρ. Nous allons indiquer la construction du cône représenté par la première de ces équations; celle des autres se fera de la même manière. Nous prendrons pour axes des coordonnées $x\,y\,z$, les droites a, b, c, dans leur position donnée, et les coordonnées d'un point quelconque seront parallèles à ces droites. Cela posé, voici la construction de la première des équations (5) (fig. 1, pl. I).

Je prends sur l'axe des x une distance $AP=\frac{b^2-d'^2}{b}$, et sur celui des y, $AQ=\frac{a^2-d^2}{a}$, qui sont les coordonnées du point M; par ce point et par l'origine, je mène la droite AM, qui est l'axe du cône cherché. Sur AM, comme diamètre, je décris une demi-circonférence sur laquelle je porte la corde $AB=\frac{d'}{b}\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)$: la droite AB est la génératrice qui en tournant autour de AM, engendre le cône représenté par la première des équations (5).

Les axes des deux autres cônes se trouvent l'un dans le plan des yz, et l'autre dans celui des xz. Les génératrices se déterminent comme dans l'exemple précédent.

Les intersections de deux de ces cônes sont aisées à obtenir par la règle et le compas.

On trouve deux solutions pour la position de ρ, parce que les équations (2) sont les mêmes, au signe près, soit qu'on prenne tous les signes supérieurs dans les équations (1), soit qu'on prenne les signes inférieurs. Mais comme nous n'avons employé que les carrés desdites équations (2), qui comprennent l'un et l'autre signe, il s'ensuit que nous avons dû obtenir la solution des deux cas.

ρ étant déterminé de position, $\cos(\rho, a)$, $\cos(\rho, b)$ et $\cos(\rho, c)$ sont connus: une quelconque des équations (4) donnera donc immédiatement la longueur absolue de cette droite, et par suite celle du rayon R.

On peut remplacer, dans la construction précédente, un des deux cônes par un plan passant par l'origine; car une combinaison quelconque des équations (5) pouvant remplacer une d'entre elles, on peut multiplier la première par $\frac{d''}{c}$, la seconde

par $\frac{d}{a}$, et la troisième par $\frac{d'}{b}$, , et les ajouter membre à membre : on aura par ce moyen

$$(6)\left\{\begin{array}{l}\cos(\rho,a)\left\{\frac{d''}{c}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)-\frac{d'}{b}\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)\right\}\\ +\cos(\rho,b)\left\{\frac{d}{a}\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)-\frac{d''}{c}\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)\right\}\\ +\cos(\rho,c)\left\{\frac{d'}{b}\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)\right\}\end{array}\right\}=o.$$

Cette équation est celle d'un plan qui passe par l'origine, et qui peut remplacer un des cônes (5). En la représentant, pour abréger, par

(A) $\quad l\cos(\rho.a)+m\cos(\rho,b)+n\cos(\rho,c)=o,$

faisant :

$$k^2=l^2+m^2+n^2+2lm\cos(a,b)+2ln\cos(a,c)+2mn\cos(b,c),$$

et représentant par (A,ab), (A,ac), (A,bc) les angles que ce plan fait avec les trois plans coordonnés, on aura :

$$\cos(A,bc)=\frac{l\sin(a,bc)}{k},$$

$$\cos(A,ac)=\frac{m\sin(b,ac)}{k},$$

$$\cos.(A,ab=\frac{n\sin(c,ab)}{k}.$$

Ce plan est donc entièrement déterminé de position : son intersection avec un des cônes (5) fournira les deux directions de ρ.

Le problême est ainsi entièrement résolu, et (je me plais à le croire) de la manière la plus simple.

DEUXIÈME PROBLÊME.

Déterminer le volume de l'onglet conique, provenant de l'intersection d'un cône droit par un plan donné.

Solution.

La figure 2, planche I, représente les projections horizon-

verticale du cône et de l'onglet enlevé par le plan de; l'intersection du cône par ce plan a pour projection horizontale la courbe DED'.

Soient r le rayon de la base du cône,

$\frac{1}{m}$ la tangente de l'angle acb que la génératrice fait avec l'axe,

n la tangente de l'angle deg que le plan coupant fait avec l'axe,

et α l'angle DCB, de sorte que l'arc DBD' soit $= 2r\alpha$.

Supposons une section horizontale faite dans le cône et dans l'onglet par un plan ki, la projection horizontale de la section de l'onglet sera $HLIL'H$, et sa projection verticale li.

Soit $ck = z,\ ki = CI = CL = x,\ LCI = \varphi$;

on aura : $z = mx,\quad x\cos\varphi + n(mr - z) = r\cos a$,

donc $x = r(\cos\alpha - mn) : \cos\varphi - mn$

et $$dx = \frac{r\sin\varphi\, d\varphi(\cos\alpha - mn)}{(\cos\varphi - mn)^2},$$

et par conséquent

$$dz = \frac{mr\sin\varphi\, d\varphi(\cos\alpha - mn)}{(\cos\varphi - mn)^2}$$

Cela posé, en représentant par v le volume de l'onglet, on aura $dv = HLIL'H.\, dz$;

or, on a

$HLIL'H = x^2(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$,

donc $$dv = mr^3(\cos\alpha - mn)^3 . \frac{(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - mn)^4}$$

Il ne s'agit plus que d'intégrer cette équaiton.

Or, on a

$$\int\frac{(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - mn)^4} = \frac{1}{3}\frac{(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)}{(\cos\varphi - mn)^3} - \frac{1}{3}\int\frac{2\sin^2\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - mn)^3}$$

$$\int\frac{2\sin^2\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - mn)^3} = \frac{\sin\varphi}{(\cos\varphi - mn)^2} - \int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - mn)^2};$$

$$\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - mn)^2} = \frac{1}{1 - m^2n^2}\left\{\frac{mn\sin\varphi}{\cos\varphi - mn} + \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi - mn}\right\};$$

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi - mn} = \frac{1}{\sqrt{(1 - m^2n^2)}}\text{Log.}\left\{\frac{1 + \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{\left(\frac{1 + mn}{1 - mn}\right)}}{1 - \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{\left(\frac{1 + mn}{1 - mn}\right)}}\right\}.$$

En faisant la substitution successive de ces valeurs, on obtient, en observant qu'on n'a pas besoin d'ajouter des constantes à ces intégrales, qui disparaissent avec φ,

$$\int dv = \tfrac{1}{3}\, mr^3 (\cos\alpha - mn)^3 \left[\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{(\cos\varphi - mn)^3} - \frac{\sin\varphi}{(\cos\varphi - mn)^2} + \frac{1}{1-m^2n^2}\left\{\frac{mn\sin\varphi}{\cos\varphi - mn} + \frac{1}{\sqrt{(1-m^2n^2)}}.\,\mathrm{Log.}\left(\frac{1+\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\left(\frac{1+mn}{1-mn}\right)}}{1-\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\left(\frac{1+mn}{1-mn}\right)}}\right)\right\}\right]$$

Cette intégrale devant être prise depuis $\varphi = o$, jusqu'à $\varphi = \alpha$, pour avoir le volume total de l'onglet, ce volume devient

$$(a)\quad v = \tfrac{1}{3} mr^3 \left[\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha(\cos\alpha - mn) + \left(\frac{\cos\alpha - mn}{\sqrt{1-m^2n^2}}\right)^2 mn\sin\alpha + \left(\frac{\cos\alpha - mn}{\sqrt{(1-m^2n^2)}}\right)^3 \mathrm{Log}\left\{\frac{1+\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha.\sqrt{\left(\frac{1+mn}{1-mn}\right)}}{1-\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha.\sqrt{\left(\frac{1+mn}{1-mn}\right)}}\right\}\right].$$

Lorsqu'on a $n = o$, le plan coupant devient parallèle à l'axe, et l'expression du volume se réduit à

$$v = \tfrac{1}{3} mr^3\left\{\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^3\alpha\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha}{1-\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha}\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3} mr^3\left\{\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^3\alpha.\,\mathrm{Log.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)\right\}.$$

Cette dernière expression donne la solution d'un problême de fortification souterraine, en fournissant le volume de la pénétration des entonnoirs de deux fourneaux de mines accolés. L'expression de ce volume n'avoit pas encore été donnée sous une forme finie.

Nous pourrions examiner ici les différentes modifications de signes que doit subir l'équation (a) selon les différentes inclinaisons du plan coupant, et selon que l'onglet comprend, ou non, le sommet du cône : mais cette recherche est trop facile pour mériter de trouver place dans cette solution. Nous observerons seulement que lorsqu'on a $1 - m^2n^2 = o$, (ce qui donne les deux cas où la section est une parabole) la formule (a) est en défaut, et ne donne plus le volume de l'onglet. Dans ces

deux cas il faut substituer la valeur de mn, dans l'expression de dv, et l'intégrer; ce qui fournit les deux valeurs suivantes :

$$v = \frac{1}{3} mr^3 (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \frac{2}{3}\sin^3\alpha),$$

$$v = \frac{1}{3} mr^3 (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \frac{2}{3}\sin^3\alpha).$$

La première a lieu pour le cas où l'onglet ne comprend pas le sommet du cône, et la seconde pour celui où il comprend ce sommet.

Autre manière de déterminer la Ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le Filet d'une Vis triangulaire. (Voyez *la pag.* 13 *de ce vol. n°.* 1.)

Par M. Français, Capitaine du Génie.

La solution de ce problême repose sur une propriété qu'ont les hélices qui composent le filet de la vis. La surface de ce filet peut être considérée comme composée d'une infinité d'hélices, ayant le même pas, et ayant pour projections sur un plan perpendiculaire à l'axe, des circonférences de cercles concentriques, dont les rayons augmentent depuis zéro jusqu'à celui de l'hélice extrême. Les tangentes des angles que ces hélices font avec une parallèle à l'axe sont proportionnelles à ces rayons. Il suffit donc de connoître le rapport de cette proportion (rapport qui est donné immédiatement, dans chaque cas particulier, par le pas de la vis et son rayon) et l'angle qu'une hélice fait avec une parallèle à l'axe, pour déterminer son rayon, et par conséquent sa position sur le filet de la vis.

Cela posé, cherchons le point de séparation d'ombre et de lumière sur la droite génératrice de la vis, dans une position donnée. Si par cette droite on mène un plan parallèle au rayon de lumière, il sera tangent au filet de la vis, au point de séparation d'ombre et de lumière de cette génératrice. Si l'on conçoit l'hélice passant par ce point, ainsi que le cylindre droit contenant cette hélice, et qu'on mène par ce point un plan tangent au cylindre, l'intersection de ce plan avec celui qui passe par la génératrice, et qui est parallèle au rayon de lumière, donnera la tangente à l'hélice au point de séparation d'ombre et de lumière, et par conséquent l'angle que l'hélice, passant par ce point, fait avec une parallèle à l'axe. Mais pour avoir cet angle, on n'a pas besoin de connoître la position de cette hélice, ce qui est là

chose en question; car les plans tangens à tous les cylindres aboutissant à une même génératrice, sont parallèles entr'eux, et perpendiculaires à la projection de la génératrice sur un plan perpendiculaire à l'axe. Leurs intersections avec le plan parallèle au rayon de lumière seront donc des droites parallèles, et également propres à déterminer l'angle en question. Menons donc par un point quelconque de la génératrice un plan perpendiculaire à la projection de cette génératrice sur un plan perpendiculaire à l'axe: l'intersection de ce plan avec celui parallèle au rayon de lumière mené par la génératrice, nous donnera une droite qui fera avec une parallèle à l'axe le même angle que l'hélice cherchée, fig. 2, planche I.

Connoissant cet angle, on a par la propriété que nous avons énoncée d'abord, la position de l'hélice et la solution du problême.

La détermination de l'hélice, par la connoissance de l'angle qu'elle fait avec une parallèle à l'axe, peut se faire par cette construction très-simple.

Par A on mène deux perpendiculaires AB, AC; on fait AC égal au pas de la vis, et AB égal au développement de la circonférence de la projection de l'hélice extrême; CB sera le développement de cette hélice. On fera AD égal au rayon de la projection de l'hélice extrême; on abaissera la perpendiculaire DE, et on menera la parallèle GE. Cela posé, soit ACm l'angle que l'hélice cherchée fait avec une parallèle à l'axe, on aura Gn égal au rayon du cylindre qui contient l'hélice cherchée. Je pense que cette construction est assez évidente, pour n'avoir pas besoin de démonstration.

N.B. La même méthode est applicable à la détermination du contour apparent. Il suffit de faire passer un plan par la génératrice donnée et par l'œil, au lieu de le faire parallèle au rayon de lumière.

Proposition de Géométrie,

J'ai publié, dans le premier volume de la Correspondance, page 179, le théorême suivant : « Si entre deux droites fixes et qui se coupent, on fait mouvoir deux plans rectangulaires, la surface engendrée par la droite intersection des deux plans mobiles, est un cône qui a le même sommet que l'angle des deux droites fixes, et qui a pour base un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'une ou à l'autre de ces droites. »

M. Binet (J.), répétiteur de géométrie descriptive, a trouvé une proposition plus générale, qu'on peut énoncer ainsi :

« Si entre deux droites fixes, et situées d'une manière quelconque dans l'espace, on fait mouvoir deux plans rectangulaires, la surface engendrée par la droite intersection des deux plans mobiles est un *hyperboloïde à une nappe* (Voyez pag. 32 du Traité des Surfaces du second Degré; par MM. Monge et Hachette).

Quelles que soient les deux droites fixes, on peut prendre les plans des coordonnées, de telle manière que les équations de ces droites soient

pour la première $\{ y = ax, \quad z = c.$

pour la seconde $\{ y = -ax, \quad z = -c.$

Les équations des plans qui passent par ces droites sont :

$$z = -Kax + Ky + c.$$
$$z = K'ax + K'y - c$$

K et K' étant deux indéterminées; or, si on suppose les deux plans rectangulaires, on aura l'équation de condition :

$$KK'(1 - a^2) + 1 = 0.$$

Substituant dans cette équation pour K et K' leurs valeurs tirées des équations des plans, l'équation de la surface engendrée par la droite intersection des deux plans rectangulaires sera :

$(E) \qquad a^2x^2 + z^2(a^2 - 1) - y^2 = c^2(a^2 - 1)$, ou :

$(E) \qquad y^2 + z^2(1 - a^2) - a^2x^2 = c^2(1 - a^2).$

Lorsque a est plus grand que 1, la section principale elliptique est dans le plan des xz; lorsqu'il est plus petit que 1, cette section principale est dans le plan des yz.

En comparant l'équation (E) à l'équation générale de l'hyperboloïde à une nappe :

$$Lx^2 + Mz^2 - Ny^2 = 1$$

on voit que la surface de l'équation (E) est moins générale; car on a l'équation de condition :

$$L = M + N.$$

H.C.

Démonstration d'un Théorème de M. HACHETTE, *sur les Surfaces engendrées par une Ligne droite ;*

Par M..... Élève de l'École Polytechnique.

Théorème.

Quelle que soit la surface engendrée par une droite, et dans quelle que position qu'on considère sa génératrice, elle pourra être touchée, le long de cette génératrice, par une infinité de surfaces du second degré, du genre de celles qu'on a nommées *hyperboloïdes à une nappe*.

Je prends une droite génératrice située d'une manière quelconque, ses équations seront :

$$x = \alpha z + \phi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha) z + \pi(\alpha).$$

Je vais faire voir que si l'on prend une droite arbitraire dans l'espace, l'on pourra toujours faire passer par cette droite une surface du second degré tangente à la surface donnée, le long de la génératrice que l'on considère.

Pour cela, soient x, y, z, les coordonnées d'un point pris sur cette génératrice ; l'équation du plan tangent en ce point sera :

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y);$$

Prenant pour axe des z la droite arbitraire, le plan tangent viendra la rencontrer en un point pour lequel on aura :

$$x' = 0, \; y' = 0, \; z' = z - px - qy;$$

Joignant ce point avec le point de contact, on aura une droite qui sera évidemment tangente à la surface donnée au point x, y, z, et qui s'appuyera sur la droite arbitraire ; ses équations seront :

$$y' = \frac{y}{x} x' \text{ et } x' - x = \frac{x}{px + qy}(z' - z)$$

Si je puis entre ces deux équations et celles de la génératrice éliminer x, y, z, j'aurai une équation qui sera le lieu de toutes les droites tangentes à la surface donnée le long de sa génératrice, et qui s'appuyent sur la droite arbitraire; la surface qu'elle représentera sera par cela même tangente à la surface donnée le long de sa génératrice. Il s'agit de faire voir que cette surface est du deuxième degré.

L'on a trouvé pour p et q (*pag.* 50 du *cours d'analyse appliquée à la géométrie*), les valeurs suivantes :

$$p=\frac{z\psi'+\pi'}{\alpha(z\psi'+\pi')-(z+\phi')\psi},\; q=\frac{-(z+\phi')}{\alpha(z\psi'+\pi')-(z+\phi')\psi}$$

et de plus : $\alpha p+q\psi=1$

La deuxième équation de la tangente donne :

$$px+qy=\frac{x}{x'}(z'-z+px+qy)$$

et en vertu des équations précédentes, et de celles de la génératrice, sur laquelle le point x, y, z, est situé, on a :

$$px+qy=z+p\phi+q\pi$$

et

$$p\phi+q\pi=\frac{Az+C}{Bz+D}$$

En faisant, pour abréger :

$$\phi\psi'-\pi=A,\; \phi\pi'-\phi'\pi=C,\; \alpha\psi'-\psi=B,\; \alpha\pi'-\phi'\psi=D;$$

substituant ces valeurs, il vient :

$$Bz^2+(A+D)z+C-\frac{x}{x'}\big((Bz'+A)z+Dz'+C\big)=0$$

Mais l'équation $y'=\frac{y}{x}x'$ donne : $\quad y'=\frac{z\psi+\pi}{\alpha z+\phi}x'$

d'où

$$z=\frac{x'\pi-y'\phi}{\alpha y'-x'\psi}$$

et par conséquent

$$x=\alpha z+\phi=-\frac{x'(\phi\psi-\alpha\pi)}{\alpha y'-x'\psi}$$

d'où

$$-\frac{x'}{x}=\frac{\phi\psi-\alpha\pi}{\alpha y'-x'\psi}$$

mettant pour z et $\frac{-x}{x'}$ leurs valeurs dans l'équation, il vient, en chassant le dénominateur :

$$B(x'\pi-y'\phi)^2+(A+D)(x'\pi-y'\phi)(\alpha y'-x'\psi)$$
$$+C(\alpha y'-x'\psi)^2+(\phi\psi-\alpha\pi)\big\{(Bx'\pi-y'\phi)z'+D(\alpha y'-x'\psi)z'$$
$$+A(x'\pi-y'\phi)+C(\alpha y'-x'\psi)\big\}=0.$$

Cette équation étant du deuxième degré et appartenant à une surface engendrée par une droite, il s'ensuit que cette surface est du genre de celles qu'on a nommées hyperboloïdes à une nappe, (Voyez le *Traité des surfaces du deuxième degré*, de MM. Monge et Hachette, pages 32 et 50).

La droite sur laquelle nous avons fait mouvoir notre tangente étant arbitraire et indépendante de la position de la surface donnée, qui est située d'une manière quelconque dans l'espace, il s'en suit que si cette droite venoit à changer, l'on auroit un autre hyperboloïde qui toucheroit cette surface suivant la même génératrice, et que par conséquent il y a une infinité d'hyperboloïdes qui jouissent de cette propriété. (Voyez des applications de ce théorême, deuxième volume de la Correspondance, page 13.)

Sur les Surfaces courbes (1),

Par M. J. Binet, Répetiteur à l'École Polytechnique.

Si on imagine un systême de portions de lignes droites parallèles, déterminées par les points où elles rencontrent une surface courbe quelconque, tous leurs milieux se trouveront sur une surface courbe. En représentant par m le degré de l'équation algébrique de la première surface, le degré de l'équation de la surface qui contient tous les milieux sera $m.\frac{m-1}{2}$. (2) On pourroit appeler cette surface des milieux du systême des cordes parallèles, surface *diamètrale*. Une courbe plane dont le degré de l'équation est m, a une courbe *diamètrale*, dont le degré est $m.\frac{m-1}{2}$.

Les surfaces du deuxième ordre ont pour surfaces diamétrales des plans, puisque $2\frac{2-1}{2}=1$. Les courbes du deuxième ordre ont des droites pour lignes diamétrales.

---

(1) Une partie de cette note ayant le même objet qu'une des Leçons du Cours d'Analyse appliquée à la Géométrie par MM. Monge et Hachette, c'est pour l'utilité des Élèves qu'on l'insère dans ce cahier de la Correspondance. (*Voyez* ce Cours, 1re. partie, pag. 46.)

(2) Voici comment on peut démontrer cette proposition : « La surface du degré m est coupée par une droite quelconque en m points qu'on peut désigner par les lettres a, b, c, d . . . ; cette droite est divisée par la surface en autant de cordes qu'il y a de combinaisons différentes de ces lettres prises deux à deux; donc le nombre de ces cordes placées sur une droite quelconque sera $m\frac{(m-1)}{2}$ et leurs milieux seront en même nombre, donc en regardant la droite comme une parallèle à l'un des axes auxquels on rapporte la surface qui contient tous les milieux des cordes parallèles, l'ordonnée de cette surface comptée sur la droite qui la coupe en m points, sera donnée par une équation du $\frac{m(m-1)}{2}$ème degré ». H. C.

Pour déterminer les diamètres des courbes du deuxième ordre, on prendra leur équation rapportée à des axes rectangulaires $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$; si on coupe cette courbe par une droite $x'=my'+\mu$, on aura pour déterminer les ordonnées y de leur intersection, l'équation

$$\{Am^2+B+Cm\}y^2+\{(2Am+C)\mu+Dm+E\}y+ \\ +D\mu+F=0.$$

La demi-somme des ordonnées de ces deux points est l'ordonnée y' du milieu de leur distance, ou du milieu de la corde qui a $x'=my'+\mu$ pour équation de sa direction. La valeur de l'ordonnée de ce point milieu sera

$$y'=-\frac{(2Am+C)\mu+Dm+E}{2(Am^2+B+Cm)}$$

c'est-à-dire la motié du coefficient de la première puissance de y pris avec un signe contraire, divisée par le coefficient de y^2. L'abcisse x' du même point est $x'=my'+\mu$; éliminant μ entre ces deux équations, on trouvera l'équation du lieu général de tous les milieux ou de la ligne qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à $x'=my'+\mu$, et qui n'en diffèrent qu'à raison de la valeur de μ. Le résultat de cette élimination, ou l'équation du diamètre conjugué à ce système de cordes, est

$$(2Am+C)x'+(2B+Cm)y'+Dm+E=0.$$

Il est visible que, si par un changement de coordonnées, on rapporte la courbe à deux axes, dont l'un, celui des nouveaux x, soit parallèle aux cordes $y=mx$; l'autre, celui des nouveaux y, soit le diamètre conjugué à ces cordes, l'équation de la courbe prendra nécessairement la forme

$$ax^2+by^2+cy+d=0,$$

puisque devant encore être du deuxième degré, elle doit fournir pour chaque valeur de y, deux valeurs égales et de signes contraires pour x. Transportant parallèlement à lui-même l'axe des x, et pour cela mettant $y+\omega$ à la place de y, l'équation deviendra

$$ax^2+by^2+(2b\omega+c)y+b\omega^2+c\omega+d=0.$$

Tant que b ne sera pas nul, on pourra faire disparoître de cette équation le terme en y en prenant $\omega=-\frac{c}{2b}$; et par-là transporter l'origine au centre de la courbe. L'équation ainsi simplifiée est de la forme $ax^2+by^2=\lambda$. Elle

comprend les espèces de courbes nommées *ellipse* et *hyperbole*.

Lorsque b sera nul, on pourra disposer de ω pour faire disparaître le terme $c\omega + d$, et l'équation deviendra

$$ax^2 + ey = 0,$$

qui donne les *paraboles*.

Les nouveaux axes forment entr'eux un angle qui est celui que les cordes forment avec leur diamètre. Il a pour cosinus

$$\frac{C - 2(A - B)m - Cm^2}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{(2Am+C)^2 + (2B+Cm)^2}}.$$

Pour que cet angle soit droit, il faut que

$$C - 2(A - B)m - Cm^2 = 0,$$

équation qui donne à m deux valeurs réelles.

L'équation des surfaces du deuxième ordre est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0.$$

On déterminera les ordonnées z des points de rencontre de cette surface et de la droite $x' = mz' + \mu$, $y' = nz' + \nu$, par l'équation

$$0 = \{Am^2 + Bn^2 + C + Dmn + Em + Fn\}z^2 +$$
$$\{(2Am + Dn + E)\mu + (2Bn + Dm + F)\nu + Gm + Hn + I\} + z$$
$$+ A\mu^2 + B\nu^2 + D\mu\nu + G\mu + H\nu + K.$$

La demi-somme

$$-\frac{(2Am + Dn + E)\mu + (2Bn + Dm + F)\nu + Gm + Hn + I}{2(Am^2 + Bn^2 + C + Dmn + Em + Fn)}$$

de ces ordonnées des deux extrémités de la corde, est l'ordonnée z', du milieu de leur distance. Les coordonnées de ce point seront donc données par les équations

$$x' = mz' + \mu,\ y' = nz' + \nu,$$

$$z' = -\frac{(2Am + Dn + E)\mu + (2Bn + Dm + F)\nu + Gm + Hn + I}{2(Am^2 + Bn^2 + C + Dmn + Em + Fn)}.$$

On obtiendra l'équation de la surface diamétrale conjuguée au système des cordes parallèles à celle que j'ai choisie, par l'élimination des quantités μ, ν entre ces trois équations. L'équation résultante est

$$(2Am + Dn + E)x' + (2Bn + Dm + F)y' + (2C + Em + Fn)z' +$$
$$+ Gm + Hn + I = 0$$

Représentons-la pour abréger par

$$Sx' + Ty' + Uz' + V = 0.$$

On détermineroit facilement par les relations qui existent entre les coefficiens S, T, U et les quantités m, n, la direction du systême des cordes conjuguées à un plan parallèle à un plan donné, et l'équation du plan conjugué lui-même.

Si l'on rapporte la surface à de nouveaux axes coordonnés, dont l'un, celui des x, soit parallèle au systême des cordes, les deux autres soient dans le plan diamétral conjugué à ce systême; il est évident que l'équation de la surface prendra nécessairement la forme $ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ey + fz + g = 0$.

Toute intersection de la surface par un plan parallèle à celui des yz, a une projection sur ce plan qui lui est identique. L'équation de cette projection est

$$by^2 + cz^2 + dyz + ey + fz + g' = 0.$$

On a prouvé qu'il existe une infinité de systêmes d'axes coordonnés par rapport auxquels l'équation de cette courbe peut prendre la forme plus simple

$$\beta y^2 + \gamma z^2 + \delta z + \epsilon' = 0;$$

l'équation de la surface rapportée toujours au même axe des x, et à des axes y et z choisis de cette manière, prendra donc la forme $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta z + \epsilon = 0$.

On peut encore la simplifier, en déplaçant le plan des xy parallèlement à lui-même et pour cela mettre à la place de z dans cette équation, $z + \zeta$, on aura

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + (2\gamma\zeta + \delta) z + \gamma\zeta^2 + \delta\zeta + \epsilon = 0.$$

Lorsque γ n'est pas nul, on peut prendre $\zeta = -\frac{\delta}{2\gamma}$ et l'équation de la surface devient $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \lambda$.

Cette équation comprend trois espèces différentes de surfaces connues sous les noms d'*ellipsoïde*, d'*hyperboloïde à une nappe*, d'*hyperboloïde à deux nappes*. Si γ est nul, on ne déterminera pas ζ par cette valeur qui seroit infinie, mais on en disposera de manière à faire disparoître dans l'équation le terme $\delta\zeta + \epsilon$, indépendant des coordonnées x, y, z; et l'équation, deviendra

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \delta z = 0.$$

Elle renferme les deux espèces de surfaces dont le centre est à l'infini, et nommées *paraboloïde elliptique*, *paraboloïde hyperbolique*.

Parmi tous les systêmes d'axes qui peuvent faire prendre à l'équation d'une surface du deuxième ordre la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta z + \varepsilon = 0,$$

laquelle conduit aux deux autres encore plus simples que nous venons d'indiquer, il en est un d'axes rectangulaires important à connoître. D'abord, nous allons faire voir que l'on peut donner à l'axe des x ou aux cordes conjuguées au plan diamétral yz, une direction perpendiculaire à ce plan.

Pour qu'une des cordes

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu,$$

soit perpendiculaire au plan diamétral

$$Sx' + Ty' + Uz' + V = 0,$$

il faut que $\qquad S - Um = 0, \; T - Un = 0;$

ou en mettant à la place de S, T, U leurs valeurs en m, n

$$Em^2 + Fmn + 2(C - A)m - Dn - E = 0$$
$$Fn^2 + Emn + 2(C - B)n - Dm - F = 0.$$

De cette dernière, tirant

$$m = -\frac{Fn^2 + 2(C-B)n - F}{En - D},$$

et mettant cette valeur dans la première, on aura l'équation

$$0 = E(Fn^2 + 2(C-B)n - F)^2 - (Fn^2 + 2(C-B)n - F)(Fn + 2(C-A))(En - D) - (Dn + E)(En - D)^2.$$

ou bien en développant les produits

$$(n^3)\left\{\begin{matrix} \{2(A-B)EF - (E^2 - F^2)D\}n^3 + \\ \{4(B-A)(B-C)E - 2(A+B-2C)DF - \\ -(E^2 + F^2 - 2D^2)E\}n^2 + \{4(C-A)(C-B)D - \\ -2(A+C-2B)EF - (D^2 + F^2 - 2E^2)D\}n + \\ +2(A-C)DF - (D^2 - F^2)E \end{matrix}\right\} = 0$$

Cette équation du troisième degré fournit au moins une valeur réelle de n à laquelle en correspond une aussi réelle de m et par conséquent un systême de cordes parallèles, perpendiculaires à leur plan diamétral conjugué. L'équation de la surface rapportée à un axe des x perpendiculaire au plan yz, pourra ainsi conserver la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta z + \varepsilon = 0.$$

On peut remarquer que le plan des xz et le conjugué diamétral du systême des cordes parallèles à l'axe des y, de même que celui des yz l'est du systême des cordes parallèles à l'axe des x;

comme d'ailleurs l'axe des y peut être pris perpendiculaire à celui des z et conséquemment au plan des $x\,z$, sans que l'équation change de forme ; il s'ensuit que nous avons déjà reconnu l'existence de deux systêmes de cordes perpendiculaires à leurs plans diamétraux conjugués. Mais l'équation (n^3) a autant de racines réelles qu'il y a de ces systêmes ; cette équation a donc deux racines réelles, et par conséquent ses trois racines le sont nécessairement. La troisième de ces racines correspond à la direction de l'axe des z perpendiculaire aux deux premières directions.

On peut, à l'aide de ces considérations, établir bien simplement les théorêmes connus sur les diamètres conjugués des surfaces du deuxième ordre, en partant des théorêmes analogues démontrés sur les courbes du second degré. Ainsi on sait que pour une même courbe, si on a les deux équations

$$\alpha x^2+\beta y^2=1,\quad \alpha' x'^2+\beta' y'^2=1,$$

il existe entre les quantités α, β, α', β' cette relation

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}.$$

on peut conclure de cette propriété des courbes du deuxième degré cette autre qui convient aux surfaces, et qui lui est analogue :

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1,\quad \alpha' x'^2+\beta' y'^2+\gamma' z'^2=1$$

étant deux équations d'une même surface rapportée à différens axes, ayant pour origine commune le centre de la surface, on a

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\gamma'}.$$

Le plan des $x'\,y'$ rencontre celui des $x\,y$ en une droite qui est diamètre de la courbe

$$\alpha' x'^2+\beta' y'^2=1\,;$$

si nous nommons $\frac{1}{a'}$ le quarré de la demi-longueur de ce diamètre et $\frac{1}{b'}$ celui de son conjugué, l'équation de la courbe

$$\alpha' x'^2+\beta' y'^2=1,$$

étant rapportée à ces nouveaux axes, sera

$$a' x'^2+b' y'^2=1$$

et l'on aura, par le théorême que nous venons de citer,

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}.$$

L'équation de la surface rapportée à ces nouveaux axes x, y' et à l'ancien des z' sera

$$a' x'^2 + b' y'^2 + \gamma' z'^2 = 1.$$

Si de la même manière on imagine le plan actuel des $y' z'$ prolongé jusqu'à son intersection avec celui des $y\, x$, en nommant $\frac{1}{c'}$ le quarré de la demi-longueur du diamètre mesuré sur cette intersection $\frac{1}{d'}$, celui de son conjugué dans la courbe

$$b' y'^2 + \gamma' z'^2 = 1;$$

l'équation de cette même courbe rapportée à ces nouveaux diamètres comme axes, sera

$$c' y'^2 + d' z'^2 = 1.$$

celle de la surface

$$a' x'^2 + b' y'^2 + \gamma' z'^2 = 1$$

deviendra, en conservant le même axe des x',

$$a' x'^2 + c' y'^2 + d' z'^2 = 1$$

et l'on aura encore

$$\frac{1}{b'} + \frac{1}{\gamma'} = \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'}.$$

Mais l'axe des x' et celui des y' sont actuellement dans le plan des xy et ont par conséquent pour diamètre conjugué à leur plan l'axe des z; donc le nouvel axe des z' se confond avec celui des z et par conséquent $\frac{1}{d'} = \frac{1}{\gamma}$.

Mais les équations

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1,$$

$$a' x'^2 + c' y'^2 = 1,$$

représentent la même courbe, ainsi

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{c'},$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{\gamma'} = \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}.$$

On établiroit avec la même facilité, en partant du théorême sur les parallélogrammes circonscrits aux courbes du deuxième degré, le théorême analogue des parallélipipèdes circonscrits aux surfaces du deuxième ordre.

Application du Théorême de Taylor au développement des fonctions

$(1+x)^m$, a^x, Log $(1+x)$, cos. x, et sin. x. (1)

La méthode suivante suppose seulement que l'on sache différentier les produits et les puissances entières des variables, et que l'on connoisse la formule de Taylor, démontrée pag. 52 du premier volume de la Correspondance, savoir :

$$\phi(x+h)=\phi x+h.\phi' x+\frac{h^2}{2}.\phi'' x+\frac{h^3}{2.3}.\phi''' x+\text{etc.}$$

1°. Soit $\phi(1+x)=(1+x)^m$; par conséquent $\phi y=y^m$,
et $\phi(y+xy)=(y+xy)^m=y^m(1+x)^m$;
d'où l'on conclut $\phi(1+x)\phi y=\phi(y+xy)$.

Développant le second membre suivant les puissances de xy, et divisant par ϕy, il vient

$$\phi(1+x)=1+x.\frac{y\phi' y}{\phi y}+\frac{x^2}{2}.\frac{y^2\phi'' y}{\phi y}+\frac{x^3}{2.3}.\frac{y^3\phi''' y}{\phi y}+\text{etc.}$$

Les coefficiens $\frac{y\phi' y}{\phi y}$, $\frac{y^2\phi'' y}{\phi y}$, $\frac{y^3\phi''' y}{\phi y}$, etc. doivent être indépendans de y, puisque cette variable n'entre pas dans $\phi(1+x)$; faisant donc;

$$\frac{y\phi' y}{\phi y}=c;$$

on aura, par une suite de différentiations fort simples,

$$\frac{y^2.\phi'' y}{\phi y}=c.(c-1),\ \frac{y^3.\phi''' y}{\phi y}=c(c-1)(c-2),\ \text{etc.}$$

Généralement, si l'on a

$$\frac{y^n.\phi^{(n)}y}{\phi y}=b;$$

on en concluera $y^n.\phi^{(n)}y=b\phi y$, et en différentiant

$$y^n.\phi^{(n+1)}y+n.y^{n-1}.\phi^{(n)}=b\phi' y;$$

(1) Cet article est extrait des Leçons d'Analyse de M. Garnier, imprimées en 1801, et dans lesquelles M. Poisson l'avoit fait insérer. H. C.

donc $\frac{y^{n+1}\cdot\varphi^{(n+1)}y}{\varphi y}=\frac{b\cdot y\varphi' y}{\varphi y}-\frac{ny^{n}\cdot\varphi^{(n)}y}{\varphi y}=b(c-n)$;

résultat qui renferme la loi des coefficiens.

La valeur de $\varphi(1+x)$ devient donc

$$\varphi(1+x)=(1+x)^{m}=1+cx+\frac{c.c-1}{2}.x^{2}+\frac{c.c-1.c-2}{2.3}.x^{3}+\text{etc.}$$

La quantité c est une fonction de l'exposant m; pour la déterminer, soit $c=fm$; on aura, relativement aux exposans m, n et $m+n$:

$$(1+x)^{m}=1+xfm\ldots\ldots+\text{etc.}$$
$$(1+x)^{n}=1+xfn\ldots\ldots+\text{etc.}$$
$$(1+x)^{n+m}=1+xf(n+m)+\text{etc.};$$

mais en multipliant l'un par l'autre, les deux premiers développemens, il vient

$$(1+x)^{m}.(1+x)^{n}=(1+x)^{m+n}=1+x(fm+fn)+\text{etc.}$$

et comme ce second développement de $(1+x)^{m+n}$ doit être identique avec le premier, il faut que

$$fm+fn=f(n+m).$$

Développant le second membre suivant les puissances de m, et supprimant fn de part et d'autre, il reste

$$fm=m.f'n+\frac{m^{2}}{2}.f''n+\text{etc.};$$

$f'n$, $f''n$, etc. doivent être indépendans de n, puisque cette quantité n'entre pas dans fm; mais si l'on a $f'n=a$, toutes les autres dérivées $f''n$, $f'''n$, etc. seront nulles; donc

$$fm=a\,m.$$

Le coefficient a étant indépendant de m, on le détermine en observant que $fm=1$, quand $m=1$, ce qui donne $a=1$; donc

$$fm=c=m;$$

et par conséquent

$$(1+x)^{m}=1+mx+\frac{m.m-1}{2}.x^{2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}.x^{3}+\text{etc.}$$

L'équation $\frac{y\varphi' y}{\varphi y}=c=m$,

donne $d.\varphi y=\varphi' y.dy=m\frac{\varphi y}{y}.dy.$

Remettant donc y^m, à la place de φy, on aura :

$$d.y^m = my^{m-1}dy;$$

et de cette manière la différentielle d'une puissance se trouve démontrée pour une valeur quelconque de l'exposant.

2°. Soit $\varphi x = a^x$; conséquemment $\varphi y = a^y$ et $\varphi(x+y) = a^{x+y}$; d'où l'on conclut $\varphi x . \varphi y = \varphi(x+y)$.

Divisant par φy, après avoir développé le second membre suivant les puissances des x, il vient

$$\varphi x = 1 + \frac{\varphi' y}{\varphi y}.x + \frac{\varphi'' y}{\varphi y}.\frac{x^2}{2} + \frac{\varphi''' y}{\varphi y}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.};$$

les coefficiens $\frac{\varphi' y}{\varphi y}$, $\frac{\varphi'' y}{\varphi y}$, $\frac{\varphi''' y}{\varphi y}$, etc., devront être indépendans de la variable y, qui ne doit pas entrer dans la valeur de φx; or, si l'on fait

$$\frac{\varphi' y}{\varphi y} = A,$$

on en concluera facilement

$$\frac{\varphi'' y}{\varphi y} = A', \quad \frac{\varphi''' y}{\varphi y} = A'', \text{etc.};$$

et par conséquent :

$$\varphi x = a^x = 1 + Ax + A^2\frac{x^2}{2} + A^3\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

On démontrera, comme à l'ordinaire, que la quantité A est le logarithme hyperbolique de la base a.

L'équation $\frac{\varphi' y}{\varphi y} = A$ donne $d.\varphi y = \varphi' y.dy = A\varphi y.dy$; donc $d.a^y = Aa^y dy$.

3°. Soit $\varphi(1+x) = \text{Log.}(1+x)$; on aura en même-temps $\varphi y = \text{Log.}\, y$ et $\varphi(y+yx) = \text{Log.}(y+yx)$; et à cause de $\text{Log.}(y+xy) = \text{Log.}\, y + \text{Log.}(1+x)$, on en concluera l'équation caractéristique

$$\varphi y + \varphi(1+x) = \varphi(y+xy).$$

Développant le second membre suivant les puissances de xy et supprimant φy de part et d'autre, il vient

$$\varphi(1+x) = y\varphi' y.x + y^2\varphi'' y.\frac{x^2}{2} + y^3\varphi''' y.\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Les coefficiens $y\,\varphi'\,y$, $y^2\,\varphi''\,y$, $y^3\,\varphi'''\,y$, etc., seront donc constans; mais si l'on fait

$$y\,\varphi'\,y = M;$$

on en conclura, par des différentiations répétées

$$y^2\,\varphi''\,y = -M,\quad y^3\,\varphi'''\,y = 2\,M,\quad y^4\,\varphi^{iv}\,y = -2.3.\,M,\ \text{etc.}$$

Généralement, de l'équation $y^n\,\varphi^{(n)}\,y = N$, on tirera, en différentiant, $y_n\,\varphi^{(n+1)}\,y + n\,y^{n-1}\,\varphi^{(n)}\,y = 0$; et par conséquent

$$y^{n+1}\,\varphi^{(n+1)}\,y = -n\,y\quad \varphi^{(n)}\,y = -n\,N;$$

résultat qui renferme la loi des coefficiens.

La valeur de $\varphi\,(1+x)$ devient donc

$$\varphi\,(1+x) = \text{Log}\,(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right).$$

La quantité M qui reste indéterminée, est ce qu'on appelle le *Module*, dont la valeur dépend de l'espèce de logarithme que l'on considere, et qui est égal à l'unité pour les logarithmes hyperboliques.

L'équation $y\,\varphi'\,y = M$, donne $d.\,\varphi y = \varphi'\,y\,.\,dy = \frac{M\,dy}{y}$; donc

$$d.\,\log.\,y = \frac{M\,dy}{y}.$$

4°. Soit $\varphi x = \cos.\,x$; par conséquent $\varphi y = \cos.\,y$, $\varphi\,(y+x) = \cos\,(y+x)$ et $\varphi\,(y-x) = \cos\,(y-x)$; l'équation connue

$$2.\cos.\,x.\cos.\,y = \cos\,(y+x) + \cos.\,(y-x),$$

deviendra

$$2\,\varphi x\,\varphi y = \varphi\,(y+x) + \varphi\,(y-x).$$

En développant les deux fonctions $\varphi\,(y+x)$, $\varphi\,(y-x)$ suivant les puissances de x, et divisant ensuite par $2\,\varphi y$, on trouve

$$\varphi x = 1 + \frac{x^2}{2}.\frac{\varphi'' y}{\varphi y} + \frac{x^4}{2.3.4}.+\frac{\varphi^{iv} y}{\varphi y} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6.}.\frac{\varphi^{vi} y}{\varphi y} + \text{etc.};$$

d'où l'on conclut, comme précédemment, que tous les coefficiens $\frac{\varphi'' y}{\varphi y}$, $\frac{\varphi^{iv} y}{\varphi y}$ $\frac{\varphi^{vi} y}{\varphi y}$, etc, doivent être constans; faisant donc $\frac{\varphi'' y}{\varphi y} = a$,

on en tirera sans difficulté

$$\frac{\varphi^{\text{iv}}y}{\varphi y}=\alpha^2,\quad \frac{\varphi^{\text{vi}}y}{\varphi y}=\alpha^3,\quad \frac{\varphi^{\text{viii}}y}{\varphi y}=\alpha^4, \text{ etc };$$

et le développement de φx deviendra

$$\varphi x = \cos. x = 1 + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\alpha^2 x^4}{2.3.4} + \frac{\alpha^3 x^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

On démontrera tout-à-l'heure que la constante α égale -1.

1°. Soit enfin $\psi x = \sin. x$, et en même temps $\varphi y = \cos. y$. On aura $\sin.(y+x)=\psi(y+x)$, $\sin.(y-x)=\psi(y-x)$; d'ailleurs on a

$$2. \sin. x. \cos. y = \sin. (y+x) - \sin (y-x);$$

par conséquent

$$2\, \psi x. \varphi y = \psi(y+x) - \psi(y-x).$$

Développant le second membre suivant les puissances de x, et divisant par $2. \varphi y$, il vient

$$\psi x = x. \frac{\psi' y}{\varphi y} + \frac{x^3}{2.3}. \frac{\psi''' y}{\varphi y} + \frac{x^5}{2.3.5}. \frac{\psi^{\text{v}} y}{\varphi y} + \text{etc.}$$

Ainsi tous les coefficiens $\frac{\psi' y}{\varphi y}$, $\frac{\psi''' y}{\varphi y}$, etc., doivent être constans; or, si l'on pose $\frac{\psi' y}{\varphi y} = 6$, on en concluera

$$\frac{\psi''' y}{\varphi y} = 6 \frac{\varphi'' y}{\varphi y} = \alpha 6,\quad \frac{\psi^{\text{v}} y}{\varphi y} = \alpha 6. \frac{\varphi'' y}{\varphi y} = \alpha^2 6,\quad \frac{\psi^{\text{vii}} y}{\varphi y} = \alpha^2 6. \frac{\varphi'' y}{\varphi y} = \alpha^3 6;$$

α étant la constante déjà employée dans le développement de $\cos. x$. Celui de ψx devient donc

$$\psi x = \sin. x = 6x + \frac{6\alpha x^3}{2.3} + \frac{6\alpha^2 x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

On démontre rigoureusement que la limite du rapport $\frac{\sin. x}{x}$, est l'unité; il faut donc qu'on ait $6 = 1$. De plus les développemens de $\sin. x$ et $\cos. x$ doivent rendre identique l'équation $\sin.^2 x + \cos.^2 x = 1$; or on a

$$\cos^2. x = 1 + \alpha x^2 + \text{etc.},\ \sin^2 x = 6^2 x^2 + \frac{6^2 \alpha x^4}{3} + \text{etc};$$

par conséquent

$$\cos.^2 x + \sin.^2 x = 1 + x^2 (\zeta^2 + \alpha) + \text{etc.} = 1;$$

d'où il suit $\alpha = -\zeta^2 = -1$. En faisant $\alpha = -1$ et $\zeta = 1$ dans les développemens de $\cos. x$ et $\sin. x$, on trouve

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4}, \text{ etc.} \quad \sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

L'équation $\frac{\psi' y}{\varphi y} = b = 1$, donne $d.\psi y = \psi' y.dy = \varphi y.dy$; donc $d.\sin. y = \cos. y.dy$; résultat d'après lequel on peut former les différentielles de toutes les fonctions trigonométriques.

Sur la Courbure des Surfaces.

M. *Dupin*, capitaine au corps impérial du génie maritime, a envoyé à S. Exc. le comte de Cessac et à M. le comte Monge l'analyse d'un ouvrage sur la courbure et l'osculation des surfaces, qu'il a l'intention de faire imprimer : un de ses amis m'a écrit qu'en attendant la publication on pouvoit insérer dans la Correspondance les deux théorêmes suivans, qui sont énoncés dans l'analyse de l'ouvrage de M. Dupin ; on propose de trouver la démonstration de ces deux théorêmes. H. C.

THÉORÊMES à démontrer.

Première Proposition. Etant donnée une surface courbe quelconque et un point P sur cette surface, on mène par ce point un plan tangent à la surface, et on la coupe par une suite de plans parallèles au plus tangent ; par le même point P de contact, on fait passer deux courbes quelconques C et C' qui rencontrent chacun des plans parallèles au plan tangent en deux points ; on joint ces points par des lignes droites, et le systême de ces droites forme une surface gauche dont la droite génératrice est constamment parallèle au plan tangent au point P ; considérant dans chaque plan coupant parallèle au plan tangent, le contour de la section et la droite qui unit les deux points de rencontre du plan coupant et des deux courbes C et C', on fait mouvoir la section dans son plan, de telle manière que chacun des points de cette section parcourt une droite parallèle à la droite qui unit les deux points des courbes C et C', le lieu

des sections parallèles transportées chacune dans son plan d'après la même loi, est *une nouvelle surface qui est osculatrice de la surface donnée ;* si on suppose que les deux courbes C et C' ont un contact du premier ordre avec des lignes de la surface donnée, la nouvelle surface aura avec celle-ci un contact du troisième ordre ; et en général si le contact des courbes est du $m^{ème}$ ordre, le contact de la surface dérivée avec la surface primitive sera du degré $m + 2$.

Deuxième Proposition. Etant donnée la courbe de contact de deux surfaces dont l'une est circonscrite à l'autre, on mène par une tangente à cette courbe un plan quelconque, qui coupe les deux surfaces suivant deux lignes courbes ; quel que soit le point de la courbe donnée, par lequel on ait mené la tangente, les deux sections planes ont en ce point un contact du second ordre, ou, autrement, elles sont osculatrices l'une de l'autre.

De l'Epicycloïde sphérique et de sa tangente ;

Par M. Hachette.

(1) On a vu (pag. 27 du vol. 2, N°. 1) que M. Gaultier construit la tangente à l'épicycloïde sphérique, en la considérant comme la résultante des deux vitesses dont le point décrivant de l'épicycloïde est animé à chaque instant, et il démontre d'après cette construction le théorême (1) énoncé pag. 25 sur la tangente à l'épicycloïde en un point quelconque. Sa démonstration est fondée sur les deux propositions suivantes de géométrie :

(2) *Première Proposition.* Les plans tangens à une sphère, menés par des points pris sur un cercle de cette sphère, font tous le même angle avec le plan de ce cercle.

(1) *Théorême* : Si pour un point quelconque d'une épicycloïde sphérique on conçoit le cercle mobile auquel il appartient, la droite qui toucheroit l'épicycloïde plane qu'on obtiendroit dans le cas où les deux cercles, l'un fixe et l'autre mobile, seroient dans le même plan, est la projection orthogonale de la tangente à l'épicycloïde sphérique sur le plan du cercle mobile correspondant au point de contact, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison du plan de ce dernier cercle par rapport au plan du cercle fixe.

(3) *Deuxième Proposition.* Quelle que soit la direction des lignes de projection d'un parallélogramme sur un plan, ce parallélogramme se projette suivant un second parallélogramme dont la diagonale est la projection de la diagonale du premier.

Du Rapport des deux vitesses d'un point qui décrit une Epicycloïde sphérique.

(4) Le point qui décrit l'épicycloïde sphérique est animé de deux mouvemens de rotation, l'un autour de la ligne des pôles du cercle fixe, et l'autre autour de la ligne des pôles du cercle mobile (*la ligne des pôles d'un cercle est la droite menée par le centre du cercle perpendiculairement à son plan*). Les arcs décrits en même temps autour de la ligne des pôles du cercle fixe par les différens points du cercle mobile, sont proportionnels aux distances de ces points à cette ligne des pôles; or, l'un de ces points en est distant d'une quantité égale au rayon du cercle fixe, et ce point est celui dans lequel les cercles fixe et mobile se touchent; donc la vitesse de rotation de ce point autour de la ligne des pôles du cercle fixe est, à la vitesse de rotation d'un point quelconque du cercle mobile, dans le rapport du rayon du cercle fixe à la perpendiculaire abaissée du point quelconque sur l'axe de rotation. Mais en représentant par 1 l'arc que parcourt dans un temps donné un point quelconque M du cercle mobile autour de la ligne des pôles, le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile décrit dans le même temps autour de la ligne des pôles du cercle fixe un arc de même longueur 1 compté sur le cercle fixe; donc le point M du cercle mobile décrit dans le même temps, autour de la ligne des pôles du cercle fixe, un arc d'un rayon égal à la distance du point M à cette ligne des pôles, et dont la longueur est (en nommant cette distance d et le rayon du cercle fixe r), $1 \times \frac{d}{r}$, ou $\frac{d}{r}$; or, les arcs que le point M du cercle mobile tend à décrire dans le même temps sont les mesures de ses deux vitesses de rotation, l'une autour de la ligne des pôles du cercle mobile, et l'autre autour de la ligne des pôles du cercle fixe; donc ces deux vitesses sont dans le rapport de 1 a $\frac{d}{r}$ ou dans le rapport de r à d, c'est-à-dire dans le rapport du rayon du cercle fixe à la perpendiculaire abaissée du point de l'épicycloïde que l'on considère sur la ligne des pôles de ce cercle fixe.

Construction de la Tangente à l'Epicycloïde.

(5) Soit (fig. 1, 2, 3, planche II,) *A m y* le cercle fixe, tracé sur le plan de projection qu'on suppose horizontal ; soient (fig. 2) *FF'*, *FC* les lignes des pôles du cercle fixe et du cercle mobile tracées sur le second plan de projection qu'on suppose vertical ; *F' A* et *A C B* sont les projections sur ce plan du cercle fixe et du cercle mobile ; *B A D* ou *C F F'* est l'angle des plans de ces deux cercles.

(6) Le cercle mobile qui touche le cercle fixe au point *A* se projette (fig. 1) suivant l'ellipse *A M'' b*, et pour le montrer dans sa véritable grandeur, on suppose qu'il ait tourné autour de son diamètre *A B*, jusqu'à ce qu'il ait pris la position *A M B* (fig. 3), et que le plan de la fig. 3 se confonde avec celui de la fig. 2.

(7) Un point quelconque *M* (fig. 3) du cercle mobile se projette (fig. 1), en un point *M''*, tel que *D' M''* perpendiculaire à *A C* soit égal à *MM'* (fig. 3) perpendiculaire à *A B*. D'après l'article (4), les vitesses du point quelconque *M* (fig. 3), de l'épicycloïde sont dans le rapport du rayon (fig. 1) *F' A* ou *F' M* du cercle fixe, à la distance *M'' F'* du point *M* à la ligne des pôles *F'* du cercle fixe, ou menant les tangentes *A T*, *M'' D* des cercles qui ont pour rayons *F' A* et *F' M''*, ces deux vitesses sont dans le rapport de *A T* à *M'' D*; donc si l'on porte sur la droite *ME* (fig. 3) qui touche le cercle mobile au point *M*, une droite égale à *A T*, et si l'on conçoit par ce point *M* une autre droite égale et parallèle à *M'' D*, on aura, à partir du point *M*, deux droites qui représenteront en grandeur et en direction les vîtesses de ce point *M*; donc la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites comme côtés, sera la tangente à l'épicycloïde au point *M*; il s'agit maintenant de démontrer que cette tangente rencontrera la droite qui est menée (fig. 3) par le point *B* extrémité du diamètre *AB*, perpendiculairement au plan du cercle *AMB*; ce diamètre *AB* du cercle mobile *AMB* passe par le point de contact *A* de ce cercle et du cercle fixe.

Démonstration du Théorême (Voyez la note, pag. 87) *sur la Tangente à l'Epicycloïde sphérique.*

(8) Soit projetté le parallélogramme des vitesses sur le plan du cercle mobile dont la trace sur le plan horizontal est *AT* (fig. 1), en prenant pour lignes de projection des droites horizontales parallèles à *A D* ou perpendiculaires à la trace *A T*;

la vitesse autour de la ligne des pôles du cercle fixe représentée en grandeur par $M''D$, se projettera suivant une droite egale à $M''D'$, et (fig. 3) suivant la direction de la droite $MM''=M'D'$; la vitesse autour de la ligne des pôles du cercle mobile est représentée en grandeur par AT (fig. 1); et comme la direction de la tangente ME (fig. 3) de cette vitesse est dans le plan même du cercle mobile sur lequel on projette le parallélogramme des vitesses, MM' et ML (fig. 3) $= AT$ seront les deux côtes du parallélogramme des vitesses projetté sur le plan du cercle mobile; donc la diagonale MQ de ce parallélogramme sera (art. 3) la projection de la diagonale du parallelogramme des vitesses, et par conséquent la projection de la tangente à l'épicycloïde sur le plan du cercle mobile. Cette projection coupe le diamètre AB au point p'; or ce diamètre est la projection oblique de la perpendiculaire au plan du cercle AMB élevée par le point B sur ce plan; donc le point p' doit aussi être la projection d'un point de cette perpendiculaire, dans l'hypothèse où elle rencontre la tangente à l'épicycloïde; ainsi la question est ramenée à démontrer que le point p' est à-la-fois la projection d'un point de la tangente à l'épicycloïde, et d'un point de la perpendiculaire élevée par le point B au plan du cercle mobile, perpendiculaire que nous désignerons par la lettre π.

(9) Puisque l'épicycloïde décrite par un point quelconque d'un cercle mobile est sur une sphère dont le rayon est égal à la droite qui unit un point quelconque du cercle mobile et le point d'intersection des lignes des pôles du cercle fixe et du cercle mobile, la tangente à l'épicycloïde est nécessairement dans un plan tangent à cette sphère; donc après avoir mené par la tangente ME (fig. 3) un plan tangent à la sphère du rayon AF, si ce plan coupe la perpendiculaire π en un point, et que la projection de ce point soit p', on en concluera que ce même point appartient à-la-fois et à la perpendiculaire π et à la tangente à l'épicycloïde; pour trouver le point où le plan qui touche la sphère du rayon AF suivant ME, coupe la perpendiculaire π, on mène d'abord le plan tangent à cette sphère au point A; AP perpendiculaire au rayon AF sera la trace de ce plan sur la fig. 2; et considérant le triangle rectangle BAP, dans un plan perpendiculaire à celui du cercle mobile AMB, BP est la perpendiculaire π, et BAP est l'angle de ce plan tangent avec le plan du cercle mobile AMD; or (art. 2), le plan tangent suivant ME fait avec le plan de ce cercle le même angle; donc si l'on porte la droite BK' qui est égale à MK, et qui est perpendiculaire à ME, de B en M', et si l'on mène $M'P'$ parallèle à AP, P' sera le point d'intersection du plan tangent suivant ME et de la perpendiculaire π;

reste donc à démontrer que le point p' intersection du diamètre $Ap'B$ et de la diagonale MQp', est la projection du point p'.

(10) Pour construire la projection p' du point P' sur le plan du cercle mobile, il faut employer le même systême de projection que pour les côtés du parallélogramme des vitesses; donc si on mene par le point P' une droite $P\rho'$ parallèle à AD (fig. 3), elle coupera le diamètre AB au point demandé p' ; d'où il suit que l'expression de la droite Bp' doit être la même, soit que l'on considère ce point p' comme la projection du point P', ou comme l'intersection du diamètre AB et de la droite MQp', qui est la projection de la diagonale du parallélogramme des vitesses ; considerons-le d'abord comme projection du point P', intersection du plan tangent à la sphere suivant ME et de la perpendiculaire π.

(11) Nommons le rayon du cercle fixe r,
le rayon du cercle mobile r',
l'angle du plan de ces deux cercles m,
le rayon des tables 1.

Ayant prolonge le diamètre AB (fig. 2) jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne des pôles FF' du cercle fixe en un point B', on a

$$AB' = \frac{r}{\cos m}$$

Le triangle rectangle FCB' donne :

$$\sin m : r' + \frac{r}{\cos m} :: \cos m : FC = \frac{r' \cos m + r}{\sin m.}$$

Les deux triangles rectangles FCA et $BM'P'$ sont semblables, et on a :

$$FC : CA :: BM' : BP' = BM' \times \frac{r \sin m}{r + r' \cos m}$$

Le triangle rectangle $BP'p'$ donne :

$$\sin m : \cos m :: BP' : Bp' = BP' \times \frac{\cos m}{\sin m},$$

donc $$Bp' = M'B \times \frac{r' \cos m}{r + r' \cos m},$$

première expression de Bp'

(12) Regardons maintenant le point p' (fig. 2) comme l'intersection du diamètre AB et de la projection AQp' de la diagonale du parallélogramme des vitesses du point M.

On a vu que les côtés MM', ML du parallélogramme $M'MLQ$ sont dans le rapport des droites $F'D'$, $F'A$; d'où

il suit que les droites EN, EM détermineront aussi la direction de la diagonale MQN, pourvu que le rapport de ces dernières droites soit égal à celui de MM' à ML ou de $F'D'$ à $F'A$.

(13) D'après les dénominations de l'article précédent, $CM' = BM' - r'$, $AM' = 2r' - BM'$, $AF' = r$.

Dans le triangle rectangle $AM'D'$, on a :

$AD' = \cos m\,(2r' - BM')$; et par l'article (12),

(a) $EN : EM :: F'D' : F'A :: r + \cos m\,(2r' - BM') : r$

d'où l'on tire :

$$EN - EM : EM :: \cos m\,(2r' - BM') : r.$$

et à cause $EM = EB$,

(b) $BN : EM :: \cos m\,(2r' - BM') : r$

les deux triangles rectangles CMM' et EMK sont semblables et donnent la proportion

$$CM : CM' :: EM : EK = \frac{EM(BM' - r')}{r'}.$$

de cette équation et des proportions (a) et (b), on tire les valeurs suivantes de EN et BN :

$$EN = \frac{EM\left(r + \cos m\,(2r' - BM')\right)}{r.}$$

$$BN = \frac{EM \cos m\,(2r' - BM')}{r.}$$

$$EN - EK = NK = \frac{EM\,(r + r'\cos m)\,(2r' - BM')}{rr'.}$$

Les deux triangles rectangles NKM et NBp' donnent :

$$NK : KM :: NB : Bp' = NB \times \frac{KM}{NK}$$

$$Bp' = \frac{NB \times BM'}{NK.} = \frac{r'\cos m}{r + r'\cos m} \times BM',$$

deuxième expression de Bp'; et comme elle est égale à celle qu'on a trouvée art. 11, il s'ensuit que la tangente à l'épicycloïde au point M (fig. 3) coupe la perpendiculaire BP au plan du cercle AMB en un point P', intersection de cette perpendiculaire et du plan qui touche la sphère du rayon AF au point M; donc la projection orthogonale de la tangente à l'épicycloïde sur le plan du cercle mobile est une droite MB, qui passe par l'extrémité du diamètre AB de ce cercle, dont l'autre

extrémité est le point de contact A du cercle mobile et du cercle fixe.

(14) Il est à remarquer que lorsque les droites FF', FC qui sont les lignes des pôles du cercle fixe et du cercle mobile, sont perpendiculaires entr'elles comme dans les fig. 1. *a*, fig. 2. *a*, la projection oblique Mp' et la projection orthogonale MB de la tangente à l'épicycloïde sur le plan du cercle mobile se confondent, et que le point p' se projette dans ce cas en B extrémité du diamètre AB; c'est après avoir examiné ce cas particulier, que M. Gaultier a employé le système de projection oblique, qui l'a conduit à l'expression simple de la droite Bp', qui détermine la position de la tangente à l'épicycloïde pour le cas général où les deux lignes des pôles font entr'elles un angle quelconque.

(15) Les fig. 1, 2, 3, étant construites ainsi que la projection de l'épicycloïde sphérique sur le plan de la fig. 1, si on demande la tangente au point M'' de cette projection, on abaissera la perpendiculaire $p'p''P''$ sur AD, et on fera $p''P'' = p'P''$, la droite $M''P''$ sera la tangente demandée.

(16) J'ai fait voir (pag. 26 de ce volume) que la tangente à l'épicycloïde est l'intersection de deux plans tangens à deux sphères dont les centres et les rayons sont connus; il suit de l'article 13 que l'intersection d'un de ces plans tangens et d'une droite connue de position détermine un point de cette tangente, en sorte qu'en joignant ce point et le point de contact donné sur l'épicycloïde, par une droite, on a encore la tangente à cette courbe, comme par l'intersection des plans tangens aux sphères.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES DE PARIS (*année* 1809).

(1re. et 2e. Classes de Mathématiques des Lycées.)

On suppose une sphère, donnée de position et tournant autour d'un de ses diamètres: par le centre de cette sphère on mène un plan indéfini, qui fait un angle donné avec l'axe de rotation: chacun des points de la sphère, dans son mouvement, décrit autour de cet axe une circonférence de cercle. On suppose maintenant que dans le plan donné il y ait un point qui se meuve autour de la sphère, dans une orbite circulaire, concentrique avec elle, et à une distance si considérable que les rayons

visuels menés de ce point à toute la surface de la sphère puissent être censés parallèles entre eux. Cela posé, s'il y a des taches sur la surface de la sphère, les cercles décrits par ces taches étant vus du point éloigné, paroîtront ovalés.

On demande de déterminer la figure et l'équation de ces ovales projetées sur un plan perpendiculaire à la direction des rayons visuels.

Et comme les dimensions apparentes varient suivant la position du point éloigné dans son orbite, il y aura une position où on les verra dans leur plus grande ouverture, et un autre où on les verra extrêmement applatis et semblables à des lignes droites.

On demande de déterminer ces deux positions, en supposant toujours l'origine des rayons visuels assez éloignés du centre de la sphère, pour qu'on puisse les considérer comme parallèles : ce problême a son application dans la nature, lorsqu'on observe les taches du soleil dans les différens temps de l'année. La sphère douée d'un mouvement de rotation représente cet astre : le plan fixe est l'écliptique ; le point éloigné circulant dans ce plan se meut autour du soleil dans un orbite très-peu différent du cercle. Les taches du soleil observées de la terre, présentent dans leur mouvement de rotation autour de cet astre, les apparences successives que nous proposons de déterminer.

Solution qui a remporté le premier Prix au Concours général.

Par M. VANÉECHOUT, Elève de l'Ecole Polytechnique.

Soit AB (planc. 1, fig. 4.) l'axe de rotation de la sphère, O son centre, D une des positions du point qui circule dans le plan donné. Je considère comme le plan de la figure celui qui passe par AB et OD.

Tout point E de la sphère décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe, et dont le centre est sur cet axe. La projection de ce cercle sur le plan de la figure est une perpendiculaire EH à AB ; et si, dans ce plan, je prends EH pour axe de abscises, et une perpendiculaire à EH menée par le point E, pour axe des ordonnées, l'équation de la courbe que décrit le point E, est en représentant EI par c, $y^2 = 2cx - x^2$.

Il s'agit de trouver l'équation de cette courbe projetée sur un

plan perpendiculaire à OD. Je choisis celui mené par le point E; la trace EX' de ce plan est perpendiculaire à OD; de plus, ce plan est perpendiculaire au plan de la figure (puisqu'il l'est à OD) : il renferme donc l'axe des ordonnées que l'on suppose élevé par le point E. Je conserve cette même ligne pour axe des ordonnées, et je prends la trace EX' de ce plan pour axe des abscises. Tout point de la courbe se projette sur le plan perpendiculaire, en y abaissant une perpendiculaire qui sera par conséquent parallèle au plan de la figure. Donc tout point de la courbe et sa projection sont également distants du plan de la figure : ainsi les y ne doivent pas être changés. Quant aux x et x', si L est le pied de l'ordonnée d'un des points de la courbe, abaissant LM perpendiculaire sur EX', M sera le pied de l'ordonnée de la projection du même point. Donc EL et EM sont l'x et l'x' d'un même point.

Or on a $x = \frac{x'}{\cos LEM}$; et l'angle LEM est égal à l'angle BOD comme ayant les côtés perpendiculaires. Représentant donc ce dernier par α, il en résulte $x = \frac{x'}{\cos \alpha}$.

L'équation de la projection est donc :

$$y^2 = \frac{2cx'}{\cos \alpha} - \frac{x'^2}{\cos^2 \alpha} \text{ ou } y^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} x'(2c\cos\alpha - x')$$

équation d'une ellipse rapportée à son sommet.

En la comparant à l'équation générale $y^2 = \frac{B^2}{A^2} x(2A - x)$, ou à $A = c\cos\alpha$ projection du rayon IE sur EX'; $\frac{B}{A} = \frac{1}{\cos\alpha}$, d'où $B = \frac{A}{\cos\alpha} = c$. Le second axe est donc toujours égal à c. Il est donc le plus grand. Et comme c est une quantité constante, il s'ensuit que l'ellipse a plus ou moins d'ouverture selon que l'axe $c\cos\alpha$, ou simplement $\cos\alpha$, est plus ou moins grand.

Or, si OB' (fig. 5) est la projection de OB sur le plan dans lequel se trouve le point décrivant, OB étant l'axe de rotation, l'angle $BOB' = \theta$, est l'angle de cet axe et du plan, angle qui est donné. D étant l'une des positions du point décrivant, on a $BOD = \alpha$; représentons en outre DOB' par γ.

Si a, b, c sont les trois angles plans d'un angle trièdre, et que A, B, C soient les angles dièdres opposés, on a :

$$\cos a = \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c.$$

Et comme dans l'angle trièdre $OBB'D$, l'angle des deux plans BOB' et DOB est droit, on a $\cos\alpha = \cos\theta \cos\gamma$.

Donc aux accroissemens ou décroissemens de $\cos\gamma$ répondent ceux de $\cos\alpha$. Donc l'ellipse s'élargit ou s'applatit, selon que le point D s'approche ou s'éloigne de OB'. La plus grande valeur $\cos\gamma$ est 1 ; alors le point D est sur OB' et il vient $\cos\alpha = \cos\theta$. Le deuxième axe est $c\cos.\theta$. C'est la plus grande valeur qu'il puisse avoir. Donc jamais la courbe décrite par une des taches ne paroîtra un cercle, à moins que $\cos\theta = 1$ d'où $\theta = 0$, c'est-à-dire à moins que le plan donné ne passe par l'axe ; alors la courbe décrite paroît un cerle quand le point D est sur cet axe. Si l'on a $\cos\theta = 0$, d'où $\theta = 100$, γ étant quelconque, on a $\cos\alpha = 0$, le second axe $c\cos\alpha$ est aussi zéro ; et l'équation se réduit à $x' = 0$ équation de l'axe des ordonnées. Toujours l'on voit les courbes décrites suivant des lignes droites; et en effet, pour l'une quelconque des positions du point D, la direction OD des rayons visuels est constamment parallèle au plan de ces courbes; ce qui explique le résultat que donne l'analyse.

θ étant quelconque, si $\cos\gamma = 0$ d'où $\gamma = 100°$, OD est alors perpendiculaire à OB'; et l'on a $\cos\alpha = 0$. Il arrive donc dans ce cas particulier ce qui arrive pour une position quelconque de D quand $\theta = 100°$.

Extrait d'une Lettre de M. Gergonne, *Professeur de Mathématiques transcendantes au Lycée de Nîmes, département du Gard.*

10 Juillet 1809.

Dans votre intéressante feuille que je lis très-assidument, mais qui ne paroît pas aussi fréquemment que pourroient le desirer ceux qui aiment et cultivent les sciences exactes, *M. Monge* a démontré que le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques. Il y a quelque temps que j'étois parvenu au même théorême d'une manière un peu différente et fort simple, en partant d'une remarque de *Roberval* qui probablement seroit aujourd'hui tout-à-fait oubliée, si l'illustre auteur de la *Mécanique Analytique* ne lui avoit en quelque sorte assuré l'immortalité en la consignant dans ce bel ouvrage. Cette remarque consiste en ce que le centre de gravité d'un tétraèdre est le même que

le centre commun de gravité de quatre points matériels égaux en masse, qui se trouveroient situés aux quatre sommets du tétraèdre; et cela s'aperçoit sur-le-champ, par l'identité des procédés qui conduisent à la détermination de l'un et de l'autre centre de gravité.

Or de-là résulte immédiatement le théorême de *M. Monge*. On voit en effet que le centre commun de gravité des masses situées aux deux extrémités de l'une quelconque des arêtes sera le milieu de cette arête, que le centre commun de gravité des deux autres masses sera le milieu de l'arête opposée, et qu'ainsi le centre de gravité de tout le systême, et conséquemment celui du tétraèdre, sera le milieu de la droite qui joint ces deux points.

On parvient donc ainsi, par de simples considérations de statique, à démontrer que les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre passent toutes par le même point, et que ce point est leur milieu commun; le principe des momens montre de plus que la distance de ce point à un plan quelconque est le quart de la somme des distances au même plan des quatre sommets du tétraèdre; et les mêmes considérations prouvent que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés, passent toutes par le même point, où elles se coupent en deux parties dont l'une est double de l'autre, et que la distance de ce point à un plan quelconque est le tiers de la somme des distances au même plan des sommets du triangle. On pourroit faire sans doute beaucoup d'autres applications de la statique à la géométrie.

On a vraiment lieu d'être surpris que *Roberval* n'ait pas aperçu ces diverses conséquences de l'observation qu'il avoit faite; elles sont si simples qu'on ne pourroit, ce me semble, sans une négligence impardonnable, les passer sous silence dans des élémens de statique.

HYDROSTATIQUE.

Sur la Fontaine de Heron et la Lampe hydrostatique de MM. Girard.

Par M. Hachette.

Ces deux appareils sont du nombre de ceux que j'ai considérés dans mon Cours des Machines; les principes qui servent de base à leur construction sont développés dans la solution des deux problêmes suivans.

PREMIER PROBLÊME.

On donne trois vases *abcd*, *ABCD*, *A'B'C'D'* (fig. 6, pl. I), qu'on suppose de même forme et de même capacité ; le premier et le troisième sont remplis d'un même liquide, le deuxième contient de l'air ; on demande que le liquide du premier vase *a b c d*, en tombant dans le deuxième vase *A B C D*, élève le liquide du troisième vase *A' B' C' D'* dans un tube *L' N'* à une hauteur qui soit constante, quel que soit le niveau du liquide dans le premier vase *a b c d*.

Solution.

(1) Le vase *a b c d* étant fermé de tous côtés, le tube *LN* conduit le liquide que ce vase contient dans le vase inférieur *A B C D*; et afin que ce liquide soit remplacé par l'air atmosphérique, on fait rentrer cet air par le tube *l m*, dont l'extrémité *l* est très-voisine de *L*. Ce premier vase est alors semblable à certains verres à boire des oiseaux, qui se remplissent d'air à mesure qu'ils se vident d'eau. Le tube *LN*, ou il se termine en *N*, ou il se prolonge jusque dans un autre tube *fghk*, plein d'un liquide quelconque dont le niveau est *n N n'*.

(2) Il résulte de cette disposition que le liquide *LN* n'éprouve en *L* aucune pression, soit de l'air, soit du liquide contenus dans le vase *abcd*.

(3) Quelle que soit la position du vase *A' B' C' D'* par rapport aux deux autres *a b c d*, *A B C D*, on le met en communication avec ce dernier *A BCD* par un tube *r s t*, qui a telle forme et telle direction qu'on veut, et qui peut même passer à travers le vase supérieur *a b c d*. L'extrémité *t* de ce tube est au niveau de l'extrémité *N'* du tube *N' L'*.

(4) Tout étant ainsi disposé, il s'agit de démontrer que le liquide du vase *A' B' C' D'* s'élevera dans le tube *N' L'* à une hauteur constante *N' L'*, qui sera égale à la hauteur *LN* du tube par lequel le liquide tombe du vase supérieur *abcd* dans le vase inférieur *A B C D*; de sorte qu'ouvrant momentanément le robinet *X*, le liquide élevé dans le tube *N' L'* s'écoulera, et aussitôt qu'on fermera ce robinet le liquide s'élevera de nouveau dans le tube *N'L'* à la hauteur $N'L' = NL$.

(5) Quel que soit le liquide contenu dans les vases *abcd*, *A'B'C'D'*, la pression atmosphérique est mesurée par le poids d'une colonne de ce liquide, dont la hauteur est déterminée; nommons *H* cette hauteur. Avant qu'on ait ouvert le robinet *Y*

du tube LN qui conduit le liquide du vase $abcd$ dans le vase $ABCD$, ce dernier vase est plein d'air atmospherique dont la pression est mesurée par H; lorsque le robinet Y a été quelque temps ouvert, et ensuite refermé, le niveau du liquide dans le vase $abcd$ s'abaisse au-dessous de ab en pq, l'air contenu dans le vase $ABCD$ et le tube rst se comprime, et l'augmentation de pression est mesurée par la hauteur LN (2). Nommant cette dernière hauteur h, la pression totale de l'air contenu dans le vase $ABCD$ et le tube rst sera $H + h$.

(6) La force élastique de l'air qui aura passé du tube rst dans la partie supérieure du vase $A' B' C' D'$, et le poids du liquide que ce vase contient, font en même-temps équilibre et à la pression $H+h$ de l'air du tube rst, et à la pression atmosphérique H augmentée de la pression de la colonne liquide $L N'$; donc cette dernière pression est égale à h hauteur de la colonne liquide LN; donc, dans l'état d'équilibre de toutes les pressions, on a constamment $L' N' = L N$, quels que soient les niveaux pq, $P Q$, $P' Q'$, pourvu néanmoins qne le niveau $P Q$ soit toujours au-dessous du niveau nNn' dans le vase $ABCD$.

DEUXIÈME PROBLÊME.

Les vases $abcd$, $ABCD$, $A'B'C'D'$ sont supposés égaux; tout est disposé comme pour le problême précédent; les pressions se font équilibre; les niveaux du liquide dans les trois vases sont indiqués par les horizontales pq, PQ, $P' Q'$; on demande le rapport du volume variable du liquide $CDPQ$ qui s'est écoulé du vase supérieur $abcd$ dans le vase inférieur $ABCD$, au volume d'air $A' B' P' Q'$ qui occupe la partie supérieure du vase $A' B' C' D'$?

Solution.

Soit V le volume d'un quelconque des trois vases, et a sa hauteur verticale AC ou $A' C'$, faisant $CP = x$, $A' P' = y$, et négligeant les volumes des tubes placés dans l'intérieur des vases, les deux volumes dont on demande le rapport ont pour expressions $\frac{Vx}{a}$, $\frac{Vy}{a}$; car ces volumes et le volume V sont des parallélipipèdes de même base, qui sont entr'eux comme leurs hauteurs x, y et a.

Pour trouver la relation qui existe entre les deux quantités x et y, et pour en conclure l'une au moyen de l'autre, il faut

observer que la masse d'air contenu dans le vase $ABCD$ et dont le volume est V sous la pression H, est égale aux masses d'air des colonnes $A'B'P'Q'$ et $ABPQ$; d'où il suit : qu'en cherchant les volumes de ces trois masses d'air, dans l'hypothèse où elles seront soumises à la même pression, le volume de la première masse sera égale à la somme des volumes des deux autres masses; on concluera de cette égalité la valeur de x en y.

1°. L'air atmosphérique contenu dans le vase $ABCD$ ayant sous la pression H un volume V, il aura sous la pression $H+h$ un volume qui a pour expression $\frac{HV}{H+h}$.

2°. L'air $ABPQ$, ainsi que la portion d'air du tube rst (portion qu'on néglige), est soumis à la même pression $H+h$, et a pour volume $V-\frac{Vx}{a}$.

3°. L'air $A'B'P'Q'$ est soumis à la pression $H+h-(a-y)$; or, sous cette pression, il occupe un volume $\frac{Vy}{a}$, donc sous la pression $H+h$ son volume devient le 4e. terme de cette proportion :

$$H+h:H+h+y-a::\frac{Vy}{a}:4^e\text{terme}=\frac{Vy(H+h+y-a)}{a(H+h)},$$

donc on aura l'équation suivante :

$$\frac{HV}{H+h}=\left(V-\frac{Vx}{a}\right)+\left(\frac{Vy(H+h+y-a)}{a(H+h)}\right)$$

d'où l'on tire :

$$x=\frac{ah+y(H+h-a)+y^2}{H+h}.$$

Ainsi étant donnée la hauteur verticale $A'P'$ de la couche d'air contenu dans le vase $A'B'C'D'$, on en concluera la hauteur verticale PC du liquide tombé du vase supérieur $abcd$ dans le vase inférieur $ABCD$; et parce que cette hauteur CP est égale à la hauteur ap de la couche d'air rentré dans le vase $abcd$, il s'ensuit que des trois niveaux pq, PQ, $P'Q'$, un étant donné, les deux autres sont déterminés.

L'appareil représenté fig. 6, pl. I, est construit sur le même principe que les lampes de MM. Girard; pour le ramener à la forme d'une fontaine de Héron, il faut 1°. supprimer le tube lm, et mettre l'intérieur du vase $abcd$ en contact avec l'air atmosphérique; 2°. supprimer le tube $fghk$ et prolonger le tube LN

jusques vers le fond *CD* du vase *ABCD*; 3°. enfin, il faut supprimer la partie *st* du tube *rst*; il suit de ce qui précède que dans la fontaine de Héron la pression en *N'* est variable, et que, par une heureuse application des principes connus d'hydrostatique, on est parvenu à donner à cette pression une valeur constante.

OPTIQUE.

De l'Héliostat;

Par M. HACHETTE.

MM. BERTHOLLET et MALUS ont fait exécuter par M. FORTIN un *héliostat* d'une nouvelle construction. L'objet de cet instrument est de donner, au moyen d'un miroir plan, mobile, une direction constante aux rayons solaires réfléchis par ce miroir; le miroir est soutenu par une tige métallique perpendiculaire à son plan; on nomme cette tige la *queue* du miroir. On a déjà démontré, dans plusieurs ouvrages de physique, que lorsque le soleil décrit un cercle de déclinaison, la queue du miroir décrit un cône oblique dont la base circulaire est parallèle à l'équateur; je vais donner une démonstration synthétique de cette proposition.

Le point où la queue du miroir (supposé réduit à une ligne droite) coupe le plan de ce miroir, peut être considéré comme le centre de la terre; car pour l'héliostat ainsi que pour les cadrans, on regarde le rayon de la terre comme nul, par rapport à la distance de la terre au soleil. Soit la figure 7, planche I, dans laquelle *M* est le point du miroir pris pour le centre de la terre, *MP* l'axe de la terre, *MS* une arête du cône droit qui a pour sommet le centre de la terre et pour base le cercle de déclinaison décrit par le soleil un certain jour de l'année, enfin *Ms* la direction constante suivant laquelle l'image du soleil mobile doit être réfléchie; il s'agit de déterminer la position de la queue du miroir mobile, qui correspond à une position donnée du soleil dans le cercle de déclinaison.

Supposons que les points *P*, *S*, *s*, soient placés sur la sphère dont le centre est en *M*; le cercle de déclinaison décrit

par le soleil sera sur cette même sphère ; et désignant par S, S', S'', ... les différentes positions du soleil, la direction des rayons solaires correspondante à ces positions sera successivement MS, MS', MS'', ... or, la direction constante des rayons réfléchis est Ms ; donc le miroir doit se mouvoir de manière que sa queue divise en deux parties égales les angles sMS, sMS', sMS''...... Mais les droites Ms, MS sont d'égale longueur comme étant les rayons d'une même sphère. Il en est de même des droites Ms, MS', des droites Ms, MS'', ... donc la queue du miroir divise en deux parties égales les droites sS, sS', sS'', ... or, ces droites sont les arêtes d'un cône oblique qui a son sommet au point s, et dont la base est le cercle de déclinaison S, S', S'', etc. ; donc le milieu de ces arêtes appartient à un autre cercle dont le rayon est moitié du rayon du cercle de déclinaison ; ce dernier cercle est évidemment la base du cône oblique décrit par la queue du miroir, qui, dans toutes ses positions, passe par le point M, sommet de ce cône.

Pour suivre cette démonstration, il faut se représenter à-la-fois une sphère céleste avec le pôle et un cercle de déclinaison ; un cône droit qui a pour sommet le centre de la sphère et pour base le cercle de déclinaison ; un premier cône oblique qui a même base que le cône droit, et dont le sommet est au point où le rayon réfléchi de direction constante coupe la sphère ; enfin un second cône oblique, décrit par la queue du miroir qui a son sommet au centre de la sphère, et dont la base est le cercle qu'on obtient en coupant ce premier cône oblique par un plan perpendiculaire sur le milieu de sa hauteur.

L'aiguille d'une horloge fixe dont le cadran est placé parallèlement à l'équateur, conduit l'extrémité de la queue du miroir de l'héliostat, et lui fait parcourir une circonférence entière en 24 heures. Au moyen d'une échelle graduée, on détermine, par rapport au plan fixe horizontal, la position variable du sommet du cône oblique, qui correspond aux différentes déclinaisons du soleil ; c'est d'après le calcul numérique donné par M. Malus à M. Fortin, que cet artiste a exécuté l'héliostat du cabinet de M. Berthollet. Le calcul analytique devient extrêmement simple lorsqu'on suppose que le rayon réfléchi en direction constante est dans le plan du méridien ; cette hypothèse est d'ailleurs conforme à ce qui se pratique ordinairement.

FORTIFICATION.

(1) *Sur une nouvelle manière de défendre les Places;*

Par M. Carnot.

Il y a bien des années que j'ai imaginé une nouvelle manière de défendre les places; mais je ne l'ai point fait connoître jusqu'à présent, parce qu'elle auroit pu être employée contre la France elle-même par les ennemis : je me réservois de prendre à cet égard l'initiative dans une occasion importante, si je me trouvois un jour chargé de la défense d'une place assiégée, comme cela pouvoit arriver par les fonctions de mon état. Mais aujourd'hui que les ennemis n'ont presque plus de forteresses, tout ce qu'on pourra trouver d'utile pour perfectionner l'art défensif doit tourner presque exclusivement à l'avantage des frontières françaises : c'est pourquoi je n'hésite plus à rendre publique mes anciennes réflexions.

Si le moyen que j'ai à proposer mérite quelque attention, c'est sans doute par son extrême simplicité, qui le rend applicable partout, et indépendant de tout systême de fortification; qu'il n'exige l'emploi d'aucune arme nouvelle, et qu'à proprement parler il n'a rien de nouveau lui-même, puisqu'il ne consiste que dans l'emploi plus fréquent d'un moyen déjà usité; ce moyen est celui des feux verticaux, que je propose de multiplier prodigieusement dans la défense des places, et dont je vais discuter les effets sous ce nouveau rapport. Ce n'est pas d'aujourd'hui qu'on a senti l'utilité de ces feux verticaux multipliés. « Comme » les pierres et les grenades (dit M. de Vauban) jetées avec des » mortiers, font plus de mal encore que les bombes, et qu'elles » tuent et blessent beaucoup plus de monde, il faudra s'en pré» cautionner de son mieux. »

Mais l'effet de ces feux verticaux n'ayant point été exactement analysé, on n'a pu apprécier le ravage extrême qu'ils peuvent occasionner, et l'on n'en a jamais fait la base de la défense, comme je le propose ici.

Un fusilier qui tire de derrière un parapet, est obligé de se

---

(1) Ce Mémoire est extrait de l'ouvrage annoncé page 118.

découvrir beaucoup. Un canon que l'on tire, soit à barbette, soit même par une embrasure, reste fort exposé à tous les coups de l'assiégeant, ainsi que ceux qui le servent; et de plus, les feux horizontaux qui partent des fusils et des canons de la place vont presque tous se perdre dans les parapets des tranchées et des sapes de l'ennemi. Mais si, au lieu de tirer horizontalement, le fusilier tiroit obliquement en l'air, comme par exemple, sous l'angle de 45°, et si au lieu du canon on faisoit usage du mortier sous le même angle, il ne seroit pas nécessaire de faire des coupures dans les parapets pour les embrasures; les fusiliers et les mortiers se trouveroient entièrement à couvert des feux directs, et l'on conçoit même qu'en s'enfonçant au-dessous du parapet il seroit facile d'établir des blindages qui garantiroient les hommes attachés à ces batteries, des bombes et des ricochets. Il reste donc à savoir quel est le degré d'efficacité de ces feux verticaux, substitués, comme je le propose, à la plus grande partie des feux horizontaux.

Je suppose qu'on ne commence à faire usage de ces feux verticaux qu'à l'établissement de la troisième parallèle, parce qu'auparavant les coups seroient trop incertains; depuis cette époque jusqu'à l'ouverture des brêches il se passera au moins dix jours, suivant les calculs les plus restreints. Il s'agit donc de savoir quel sera, pendant ces dix jours, l'effet qu'auront produit dans l'armée assiégeante les feux verticaux tirés de la place.

La troisième parallèle étant supposée à 50 toises des angles flanqués des bastions et de la demi-lune, et le côté extérieur du polygone étant supposé de 180 toises, le champ occupé par l'armée assiégeante, entre les deux capitales des bastions attaqués, sera à-peu-près de 180 toises, multipliées par 50 toises ou 9000 toises carrées; mais je les porte à 15000 toises carrées pour calculer sur le *minimum* d'effet, et pour tenir lieu de l'espace occupé par l'ennemi, à droite et à gauche du front attaqué, parce qu'en effet les bonnes règles exigent qu'il s'étende des deux côtés, en débordant les capitales, pour embrasser le front et contenir l'assiégé.

Maintenant, sur cette étendue de 15000 toises carrées, il faut savoir la superficie que couvrent réellement par leurs corps les hommes de l'armée assiégeante, qui composent les travailleurs et la garde de la tranchée. On compte ordinairement que ce nombre d'hommes doit être au moins les trois quarts de celui qui forme la garnison, parce qu'il faut toujours que cette garde soit en état de repousser la sortie que pourroit faire la garnison toute entière. Supposant donc seulement une garnison de 4000 hommes, il faudra au moins 3000 hommes de garde à la tranchée; c'est-à-dire, que le nombre des assiégeans répandus sur les

avenues de la place sera au moins de 3000 hommes ; et puisque ces avenues occupent, comme on l'a dit ci-dessus, un espace de 15000 toises carrées, le nombre des assiégeans sera la cinquième partie du nombre des toises carrées occupées par les mêmes avenues, c'est-à-dire, dans la proportion d'un homme sur cinq toises carrées.

Supposons maintenant que la projection du corps d'un homme sur une surface horizontale soit seulement d'un pied carré, il faudra 36 hommes pour occuper pleinement et sans interstices la valeur d'une toise carrée ; donc le nombre des assiégeans étant d'un homme pour 5 toises carrées, sa projection sera d'un pied carré sur 180, c'est-à-dire, que la superficie occupée réellement par les individus qui composent l'armée assiégeante sera la 180me partie de tout le champ sur lequel s'étendent ses travaux.

Il suit donc de là qu'en général, sur 180 coups tirés de la place en ligne inclinée ou parabolique, un doit frapper l'ennemi dans une longue série de décharges : c'est le *minimum* des effets que puissent produire les feux verticaux, parce que j'ai supposé toutes les données beaucoup au-dessous de ce qu'elles sont réellement. Par exemple, j'ai supposé l'assiégeant uniformément répandu sur le terrein qu'il occupe ; or, environ la moitié de ce terrein est prise par les fossés où l'ennemi n'est pas encore, il est concentré sur le glacis, où il est facile de concentrer aussi tous les feux verticaux, ce qui en double à-peu-près l'effet, surtout en dirigeant ces feux sur les capitales où l'ennemi est plus rassemblé. De même, j'ai évalué à un pied carré seulement la projection du corps d'un homme ; mais un travailleur courbé, un homme qui marche ou qui a les bras en mouvement, offre bien plus de prise ; et d'ailleurs la ligne décrite par la balle ne le frappe pas perpendiculairement, elle vient sous un angle qui approche de 45°, et sous cette direction un homme présente une surface plus que double de celle de sa projection sur un plan horizontal. Il est donc clair que l'effet des feux verticaux est beaucoup plus considérable que nous ne l'avons supposé ; que le calcul seroit encore fort restreint, quand nous supposerions que sur 50 balles lancées en l'air il y en a une qui porte ; mais pour éviter les fausses objections, nous nous en tiendrons à notre premier résultat, que sur 180 balles lancées une seulement frappe l'ennemi.

Je suppose qu'on établisse seulement six mortiers de douze pouces sur le rempart des deux bastions attaqués et de la demi-lune, c'est-à-dire deux sur chacun de ces ouvrages, à l'angle flanqué dans le sens de la capitale, sur les zigzags de l'ennemi, parce que c'est là, comme nous venons de le dire, qu'il se trouve le plus rassemblé.

J'observe d'abord qu'en s'établissant derrière le parapet, redressant intérieurement ce parapet perpendiculairement à la capitale, s'enfonçant de douze ou quinze pieds dans le terre-plein du rempart, s'épaulant de droite et de gauche, et blindant la batterie à l'épreuve de la bombe, de maniere à ne laisser que le jour nécessaire pour que le feu s'échappe librement sous l'angle de 45°. J'observe, dis-je, d'abord, que cette batterie de deux mortiers, l'un à droite, l'autre à gauche de la capitale, se trouvera parfaitement à l'abri des bombes et des ricochets, aussi bien que des feux directs. Les derrières de la batterie seront laissés tout ouverts pour éviter la fumée, et on fera régner autour soit une barrière, soit un petit fossé plus bas encore que le sol de cette batterie, pour éviter les éclats des bombes qui pourroient tomber aux environs.

Le mortier de douze pouces, dont la bombe pèse 150 livres, peut lancer un poids égal de petites balles de fer battu, d'un quart de livre chacune; ce qui fera six cents balles à chaque coup; ainsi les deux mortiers de la batterie lanceront ensemble, à chaque décharge, douze cents balles; et par conséquent les six mortiers des trois batteries en lanceront, à chaque décharge, 3600. Donc, puisque sur 180 balles une doit porter, sur les 3600 il y en aura 20 qui porteront; c'est-à-dire qu'à chaque décharge des trois batteries il y aura 20 des assiégeans mis hors de combat.

Il nous reste à savoir combien de décharges on peut faire dans les 24 heures, tant du jour que de la nuit.

Je suppose que de chaque mortier on tire cent coups par jour; ce qui fait à-peu-près un quart-d'heure d'intervalle d'un coup à l'autre. Puisque les batteries mettent hors de combat 20 hommes à chaque décharge, il y aura pour chaque jour, depuis l'établissement de la troisième batterie, 2000 hommes hors de combat, et par conséquent pendant les dix jours compris jusqu'à l'attaque des brèches, 20000 hommes.

La force de la garnison a été supposée de 4000 hommes; supposant donc l'armée assiégeante cinq fois aussi forte, elle se trouvera de 20000 hommes; c'est-à-dire, qu'elle sera entièrement détruite, avant seulement que d'être en mesure d'insulter les brèches.

Si la garnison étoit plus forte, l'ennemi perdroit des siens en proportion, de sorte que pour une garnison de 10000 hommes, il en perdroit 50000 par la seule action des feux verticaux, indépendamment des autres genres de défense et des maladies.

Je n'ai supposé que dix jours depuis l'établissement de la troisième parallèle jusqu'à l'attaque des brèches; mais quelle est la place qui n'en exige pas le double ou le triple? Or, le nombre

d'hommes perdus par l'assiégeant deviendra aussi double ou triple ; mais j'ai voulu prévenir tous les sujets de contestation, en adoptant le *minimum* même des calculs que j'ai réfutés ailleurs. Par cette même raison j'ai supposé que chaque mortier ne tiroit qu'un coup par quart-d'heure, quoiqu'on puisse facilement lui en faire tirer le double sans échauffer la pièce.

Il est donc impossible de réduire une place quelconque, soit petite, soit grande, défendue de cette manière, à moins qu'on n'invente quelques nouveaux moyens d'attaque, quoique ces moyens soient aujourd'hui regardés comme parvenus au *maximum* de leur perfection.

Si l'assiégeant, pour se soustraire à cette pluie de balles, essaie de cheminer sous des blindages, on conçoit qu'à la moindre sortie il sera mis dans la plus grande confusion ; car comment se dégagera-t-il de ces longues galeries blindées, pour faire tête à l'assiégé? Comment réparera-t-il, à chaque fois, le désordre occasionné dans ses logemens? Comment empêchera-t-il qu'on ne les culbute ou qu'on ne les brûle? Et où trouvera-t-il une assez grande quantité de bois pour suffire à un semblable travail, abstraction faite du temps énorme qu'il faudroit pour l'exécuter?

Si l'assiégeant prend le parti de cheminer sous terre, en se bornant à attaquer par les mines, il se réduira de lui-même à une condition pire que celle de l'assiégé qui a ses contre-mines préparées : il ne pourra plus avoir de batteries, au moins rapprochées, puisqu'elles ne seroient plus gardées ; l'assiégé conservera donc tout son feu, et il est évident qu'un pareil siége est impossible.

Observons que la garnison n'est point du tout exposée, ni fatiguée par ce nouveau genre de défense ; qu'elle roule toute entière sur quelques compagnies de bombardiers, qu'il n'y a ni canons démontés, ni affûts brisés ; qu'il s'agit seulement de seconder cette opération par des sorties faites à propos, pour inquiéter l'ennemi et le forcer d'avoir toujours grand monde à la garde des tranchées, afin d'augmenter l'effet des feux verticaux qui doivent le détruire ; qu'enfin il est important surtout d'y joindre la guerre souterraine qui coûte fort peu d'hommes, afin de gagner du temps et d'arrêter l'ennemi, le plus possible, sous la grêle des balles.

Ce genre de défense a encore cela de particulier, que l'assiégeant ne peut user de réciprocité envers l'assiégé ; car celui-ci laisse agir ses mortiers qui sont sous des blindages, en se tenant lui-même sous les abris de la place ; tandis que l'assiégeant est obligé de cheminer à ciel ouvert, et de conserver toujours dans ses tranchées un nombre d'hommes suffisant pour les garder contre les sorties imprévues de l'ennemi.

Je n'ai supposé que six mortiers en activité : on peut en mettre beaucoup plus, et les placer ailleurs qu'aux points indiqués : par exemple, dans les premiers jours, on peut les mettre sur les saillans du chemin couvert, et pendant les derniers, sur la courtine ou le milieu de la tenaille. Le lieu le plus convenable pour enfiler les branches du chemin couvert est sur les deux faces de la demi-lune, aux points où elles sont rencontrées par le prolongement de la crête du chemin couvert des bastions, et sur les faces des bastions, aux points où elles sont rencontrées par les prolongemens de la crête du chemin couvert de la demi-lune. En plaçant deux nouveaux mortiers à chacun de ces quatre points, on en aura en tout quatorze, qui couvriront sans cesse tout le glacis de projectiles, et ne permettront certainement pas que l'ennemi s'y établisse.

On peut aussi suppléer aux mortiers de 12 pouces par d'autres de 10 ou de 8, par des obusiers, ou même par des pierriers qu'on chargeroit, si l'on veut, de balles. Ces balles ne devant être portées qu'à 50 toises au plus, la charge de poudre seroit très-petite, fatigueroit peu les pièces, et n'occasionneroit que peu ou point de recul, ce qui en rendroit le service facile.

Enfin on peut, comme je l'ai dit au commencement, employer de simples fusiliers qu'on exercera à tirer sous l'angle d'à-peu-près 45°, et qu'on pourra placer, soit le long de la courtine, soit dans les fossés; auprès des angles flanqués, vis-à-vis des capitales, où l'on pourra même, si l'on veut, établir des blindages pour ces fusiliers.

En se servant des mortiers, pierriers ou obusiers, il sera nécessaire de faire auparavant quelques coups d'épreuve, pour régler les portées, et faire varier, au besoin, l'angle du pointage.

Il me reste à dire un mot sur la dépense qu'entraîne ce nouveau mode. Comme il s'agit seulement ici de six mortiers, ou, si l'on veut, de 12 ou 15, qui tirent de quart-d'heure en quart-d'heure, avec de très-petites charges de poudre, et que cela dispense de tirer grand nombre d'autres pièces d'artillerie, il est évident que l'économie, en argent aussi bien qu'en hommes, est un nouvel avantage de cette méthode. Quoique j'aie supposé les balles faites de fer battu, comme les charges de poudre seront fort petites, il est possible que les balles de fer fondu puissent résister aux chocs sans se briser, ce qui épargneroit considérablement sur la dépense. Mais en supposant le contraire, ce que l'expérience peut apprendre facilement, il ne seroit pas nécessaire, pour cela, d'avoir de grandes provisions de fer battu : il suffiroit d'avoir des barres ordinaires de fer carré, depuis huit jusqu'à douze lignes d'équarrissage; ces barres, qui

peuvent servir à toutes sortes d'usage, seroient coupées pendant le siége même, en morceaux longs d'un pouce à-peu-près; et sans se donner la peine de les arrondir, on chargeroit de cette mitraille les mortiers, obusiers ou pierriers, ce qui produiroit le même effet que les balles : et non-seulement on feroit usage de ces fers tenus en magasins et toujours utiles, mais on en trouveroit des provisions toutes faites chez les serruriers et maréchaux de la ville; il seroit à propos que tout cela fût ensaboté et appuyé sur un culot de fer, placé au fond de l'ame de la pièce.

§. II. SCIENCES PHYSIQUES.

Sur la décomposition de l'Eau par le Diamant.

(Lu à l'Institut, le 31 Juillet 1809, par M. GUYTON-MORVEAU.)

Dans la suite des expériences sur le diamant et les substances tenant carbone, que j'ai entreprises, et dans lesquelles j'ai eu pour collaborateurs MM. Hachette, Clément et Darcet, et dont je me propose de présenter à la Classe les résultats, lorsque les dernières vérifications en auront été faites, nous avons pensé qu'il seroit intéressant d'examiner l'action du diamant sur l'eau, et si, à une température très-élevée, la force d'aggrégation du diamant ne feroit pas obstacle à son affinité pour l'oxigène de l'eau.

Nous avons employé, pour cette expérience, le fourneau et le tube de platine, qui font partie du grand appareil (1), dont je donnerai la description complète dans le mémoire où je réunirai les observations que nous avons recueillies dans le cours de ce travail, et les conséquences qu'elles présentent.

Avant que d'exposer le diamant à l'action de l'eau, il falloit d'abord s'assurer que le tube de platine chauffé au rouge blanc n'avoit lui-même aucune action sur l'eau, et qu'aucune partie de

(1) Le Conseil d'instruction de l'École Impériale Polytechnique ayant invité deux de ses membres, MM. Guyton et Hachette, à continuer les expériences qu'ils avoient commencées sur le diamant, il a autorisé l'emploi des fonds nécessaires pour acquérir cet appareil, et pour le rendre propre aux diverses expériences dont il sera rendu compte.

l'appareil ne donnoit lieu à un dégagement de gaz hydrogène par le contact de l'eau portée en vapeurs.

Tel a été le résultat d'une expérience préliminaire.

On a mis ensuite dans le tube une petite cage de platine percée de plusieurs trous, contenant un diamant brut cristallisé, du poids de 268 milligrammes, et de petits éclats de diamant brisés pour offrir plus de surface, et dont le poids étoit de 331. 5 milligrammes.

Après avoir adapté à l'entrée du tube une petite cornue de verre tenant demi-centilitre d'eau, et à la sortie un tube plongeant dans l'eau de barite et communiquant par un siphon sous la cloche, les jointures bien lutées, on a échauffé le tube, jusqu'à rougir le fourneau, et on a mis le feu sous la petite cornue, pour faire passer l'eau en vapeur.

Lorsqu'on a vu dans la cloche une suffisante quantité de gaz pour le soumettre à l'épreuve, on a arrêté l'opération, n'ayant pas l'intention de sacrifier ces diamans à la solution d'une question qui n'exigeoit qu'un premier effet.

100 parties du gaz reçu sous la cloche hydropneumatique furent introduits dans l'eudiomètre de Volta, avec cent de gaz oxigène.

Après la détonnation il y eut 103 de diminution de volume.

Les 97 restans furent remises dans l'eudiomètre, avec une nouvelle mesure de 100 parties de gaz oxigène; il n'y eut pas d'inflammation.

L'eau de barite introduite dans ce mélange l'a réduite à 192, et par conséquent produit une absorption de 5 parties, qui ne peuvent appartenir qu'aux 100 du gaz de la cloche introduite d'abord dans l'eudiomètre.

L'épreuve répétée sur 50 autres parties du même gaz, avec 50 parties du gaz oxigène, le mélange a été réduit par la détonnation à 50.

Les diamans ayant été retirés du tube de platine, celui qui pesoit. . . . . 0^{g}. 2680

n'a plus pesé que . . . . 0. 2668.

0. 0012.

et s'est ainsi trouvé avoir perdu 12 décimilligrammes ; il étoit devenu plus blanc, et sa surface étoit moins égale.

Les diamans brisés restans se sont trouvés peser 33 centigrammes très-juste.

Et comme il est très-probable qu'à raison de leur surface ils ont perdu par la combustion au moins autant que le gros diamant en proportion de leur masse, on peut, sans erreur sensible, estimer la portion de diamant brûlée dans cette opération, savoir :

Déchet sur le gros diamant . . .	0g. 0012
sur les petits.	0. 0015
Total, 27 décimilligrammes	0. 0027.

Supposant donc que la combustion du diamant donne les mêmes résultats que celle du charbon, et partant des rapports de 0,735 d'oxigène et 0. 265 de carbone pour la composition du gaz acide carbonique ; et de 0. 85662 d'oxigène, 0.14338 d'hydrogène, pour la composition de l'eau, on a :

Eau décomposée	8. 797
Hydrogène rendu libre . . .	1. 261
Oxigène uni au carbone . . .	7. 536
Acide carbonique formé. . .	10. 186

Si l'on fait attention que le gaz avoit d'abord passé dans l'eau de barite, et qu'ainsi les 0. 05 de gaz acide carbonique retrouvés après la détonnation dans l'eudiomètre, n'étoient qu'une portion échappée au flacon intermédiaire, on voit un accord assez parfait de ces résultats pour conclure que le diamant mis en contact à une haute température, avec l'eau en vapeur, la décompose comme le charbon, forme avec son oxigène de l'acide carbonique, et met en liberté l'hydrogène, qui prend avec le calorique le caractère de gaz.

De la décomposition de l'Eau par le Plomb.

Par M. Guyton-Morveau.

M. Guyton-Morveau a lu, en août 1809, à la classe des Sciences Physiques et Mathématiques, un mémoire sur le plomb ; il résulte des expériences rapportées dans ce mémoire, que la pesanteur spécifique du plomb étant 11,358, et celle de l'eau 1, la densité de ce métal s'accroît par la compression, et qu'on éleve sa pesanteur spécifique de 11,358 à 11,388 ; Muschembrock

avoit avancé que le plomb, en s'écrouissant, diminuoit en pesanteur spécifique ; M. Guyton a fait disparoître cette anomalie, en prouvant que le plomb, ainsi que tous les autres métaux, augmente, en s'écrouissant, de pesanteur spécifique. Un autre phénomène a appelé son attention ; il avoit remarqué que l'eau distillée dans laquelle il tenoit le plomb suspendu au moyen de la balance hydrostatique, prenoit bientôt un aspect laiteux, et qu'il s'y formoit à la longue un dépôt de flocons blancs ; frappé de ce phénomène, il s'est assuré que l'eau distillée agit sur le plomb spontanément et sans le secours de l'agitation ; que cette action a lieu même sur le plomb réduit du muriate, qu'elle a lieu dans l'eau distillée en vaisseaux de verre ; que cette action cesse absolument quand cette eau a été privée d'air par l'ébullition ou sous le récipient de la machine pneumatique ; qu'elle s'arrête quand l'air que l'eau pouvoit fournir est épuisé ; qu'elle recommence quand on en restitue à l'eau ; que la présence d'un sel neutre quelconque, tels que les sulfates, nitrates, muriates, en quelque petite quantité que ce soit, comme de deux millièmes de sulfate de chaux, suffit pour faire obstacle à cette action, et que c'est uniquement à cette circonstance qu'est due la conservation du plomb sans altération, dans l'eau de la Seine, les eaux de puits, etc., soit en vaisseaux fermés, soit en vaisseaux ouverts ; tellement que ce métal peut être regardé comme un des réactifs les plus fidèles pour juger la pureté de l'eau, lorsqu'elle ne tient pas des sels avec excès d'acide (1).

De l'Analyse des Matières animales et végétales.

Par MM. Gay-Lussac et Thénard.

Amener les substances animales et végétales à un degré de dessiccation correspondant à une température constante, les transformer en gaz par la combustion, déterminer exactement les quantités de gaz qui composent un poids donné de ces substances, tel est le problême que MM. Gay-Lussac et Thénard ont résolu à l'aide d'un appareil extrêmement simple, dont nous allons donner la description.

---

(1) Depuis que M. Guyton a publié ces expériences sur le plomb, MM. Gay-Lussac et Thénard ont observé que les effets électriques des piles de Volta étoient nuls lorsqu'on séparoit les couples métalliques par de l'eau distillée bien pure et privée d'air, et qu'ils étoient encore très-foibles lorsque l'on restituoit de l'air à l'eau. H. C.

Cet appareil fig. 4, pl. II, consiste en un tube de verre AB, fermé dans la partie supérieure E par un robinet, et percé latéralement d'une ouverture B, d'où part un autre tube courbé BCD dont l'extrémité D correspond au goulot d'un flacon rempli de mercure; ce second tube est soudé au premier A B E; le robinet E est en cuivre; sur le milieu de la clef de ce robinet on a pratiqué une petite cavité, destinée à recevoir une portion de la substance qu'on veut analyser; en tournant cette clef, la substance tombe de la cavité sur le fond A du tube AB; on chauffe ce tube au moyen d'une lampe à esprit-de-vin HK, qu'on approche graduellement de l'extrémité A du tube; on a même la précaution de poser d'abord sur une grille FG quelques charbons rouges, avant de faire usage de la lampe.

Il est très-important que le robinet E ferme exactement; pour ôter tout accès à l'air, on enduit la clef du robinet d'une graisse un peu ferme, que l'on conserve dans cet état au moyen d'une petite quantité de glace retenue par l'entonnoir LM; la chaleur communiquée par le tube AB est employée à fondre la glace, et la température du robinet ne change pas sensiblement.

La méthode d'analyse de MM. G. et T. consiste à mêler un poids donné de la substance à analyser avec une quantité déterminée de muriate suroxigéné de potasse; à diviser le mélange en petites boulettes, à les introduire une à une par la cavité de la clef du robinet dans l'intérieur du tube chauffé à la température qui convient au dégagement de l'oxigène du muriate suroxigéné; enfin à recueillir les gaz qui passent par le tube BCD dans le flacon à mercure N.

On prend pour la température constante à laquelle on dessèche toutes les substances à analyser, celle de l'eau bouillante; ensuite on détermine la quantité d'oxigène qui se dégage d'un poids donné du muriate suroxigéné destiné aux combustions; 5 grammes du muriate suroxigéné fondu dont MM. G. et T. se sont servis, ont donné 128 centilitres de gaz oxigène, dont le poids est d'environ 1,78 gramme; en recherchant la quantité de muriate qu'il faut employer pour décomposer la substance à analyser, ils ont trouvé que pour une partie de sucre, de gomme, d'amidon, de sucre de lait, et autres substances analogues, il falloit 6 parties de muriate suroxigéné, et 12 parties de ce sel pour une des huiles ou des résines; le résidu de la combustion est toujours du muriate de potasse qui ne contient plus de charbon.

Les substances végétales ne contenant pas d'azote, elles ne donnent pas, en brûlant, d'acide nitrique, et on ne doit pas craindre d'employer plus de sel qu'il n'en faut pour brûler tout l'hydro-

gène et le charbon qu'elles contiennent ; mais pour l'analyse des substances animales on employe moins de sel qu'il n'en faut pour brûler tout l'hydrogène et le charbon qu'elles contenoient. Et néanmoins on doit en employer assez pour que toute la substance animale soit convertie en gaz, et qu'elle ne laisse pour résidu que du muriate de potasse sans charbon ; on forme dans ce cas une assez grande quantité de gaz hydrogène oxicarburé, qui se trouve avec le gaz acide carbonique et l'azote ; l'analyse de ce mélange se fait par les moyens ordinaires ; les gaz qui résultent de la combustion des substances végétales peuvent aussi contenir des gaz inflammables ; s'ils en contiennent, on en détermine la quantité en les mêlant avec le quart ou le cinquième de leur volume de gaz hydrogène, et en allumant le mélange dans l'eudiomètre au mercure par l'étincelle électrique ; l'addition d'un volume connu de gaz hydrogène est nécessaire, parce qu'on sait qu'un mélange d'oxigène et d'une très-petite quantité d'hydrogène ne s'enflamme pas par l'étincelle électrique; pour une partie de substance animale tels que la fibrine, l'albumine, la gélatine, la matière caseuse, on employe 4 parties de muriate suroxigéné.

Lorsqu'on veut analyser les acides végétaux, on les combine avec une base; par exemple, avec la chaux, et on détermine très-exactement la quantité d'acide que le sel contient ; comme une portion d'acide carbonique se combine avec la base, on le dégage par un acide, et on en tient compte.

On sait que les volumes d'hydrogène et d'oxigène qui composent un poids donné d'eau sont dans le rapport de 2 à 1, et les poids de ces volumes sont dans le rapport de 12 à 88 ; les poids d'hydrogène et d'oxigène qu'on obtient des substances sucrées sont dans le même rapport ; dans les acides végétaux l'oxigène est en excès par rapport à l'hydrogène pour la formation de l'eau ; mais ils n'en contiennent pas assez pour convertir tout l'hydrogène en eau et le charbon en acide carbonique ; dans les substances telles que les huiles, les résines, etc., il y a un excès d'hydrogène par rapport à l'oxigène, pour la formation de l'eau ; ces substances sont, de tous les corps, les plus charbonnées.

Les substances animales contiennent une telle quantité d'hydrogène, d'oxigène et d'azote, qu'il en résulteroit, d'une part, de l'eau, et de l'autre probablement de l'ammoniaque ; cependant, d'après l'analyse déjà faite des quatre matières animales, la fibrine, l'albumine, la gélatine, la matière caseuse, on donne à l'oxigène obtenu la portion d'hydrogène nécessaire pour la formation de l'eau, et il y a encore en excès environ

un centième de cet hydrogène pour transformer l'azote en ammoniaque ; ce qu'il y a de certain, c'est que plus une substance animale contient d'hydrogène en excès par rapport à l'oxigène pour la formation de l'eau, et plus elle contient d'azote ; ces résultats sur la composition des substances animales et végétales sont extrêmement remarquables par leur généralité.

De l'usage de l'Appareil, planch. 2, fig. 4.

On prend les quantités convenables de matière végétale ou animale, et de muriate suroxigéné de potasse desséché à la température de l'eau bouillante ; on les pèse exactement, et on les mêle intimement sur un porphyre ; ensuite on les humecte suffisamment pour les mettre en petites boulettes qu'on fait encore dessécher à la température de l'eau bouillante ; après avoir fait rougir le tube, on y introduit par le robinet un certain nombre de boulettes qu'on ne pèse pas ; les gaz qui résultent de la combustion de ces boulettes prenant la place de l'air contenu dans l'appareil, on est dispensé de toute correction relative à cet air ; lorsqu'on s'est assuré que tout l'air de l'appareil est chassé, on introduit par le robinet un poids donné de boulettes, et on recueille les gaz sur le bain au mercure pour en faire l'analyse.

Si c'est un acide végétal dont on fait l'analyse, il faut peser exactement les boulettes qu'on employe pour chasser l'air de l'appareil, afin de tenir compte de l'acide carbonique que la base de ces boulettes retient.

On voit en (*a*), (*b*), (*c*), *fig.* 5, une petite main, une spatule et un crochet qui servent à introduire les boulettes dans la cavité de la clef du robinet E ; on appuie l'extrémité de la main (*a*) *fig.* 5, sur l'entonnoir *e*, *fig.* 4, qui termine le robinet E.

La *fig.* 6 représente le robinet et ses différentes parties sur une échelle de 2 décimètres pour mètre.

Les substances végétales que MM. G. et T. ont analysées par ce procédé, sont :

Les acides oxalique, tartareux, citrique, muqueux, acétique ; la gomme, le sucre, sucre de lait, principe cristallisable de la manne ; résine de térébenthine, copal, huile d'olive, cire ; bois de chêne, de hêtre.

Les matières animales qui ont été analysées, sont : la fibrine, la gélatine, la matière caséeuse ; le tableau suivant offre les résultats de quelques-unes de ces analyses.

100 PARTIES EN POIDS DE	CARBONE.	AZOTE.	OXIGÈNE et HYDROGÈNE *Dans le rapport de 12 à 88, qui convient pour la formation de l'eau.*	OXIGÈNE. *En excès d'après le rapport de 12 à 88.*	HYDROGÈNE. *En excès d'après le rapport de 12 à 88.*
Acide oxalique. (*Le plus oxigéné des acides végétaux.*)	26,566	»	22,875.	50,559	»
Acide acétique. (*Le moins oxigéné des acides végétaux.*)	50,224	»	46,908.	2,868	»
Sucre de canne cristallisé	40,794	»	59,20 6	»	»
Sucre de lait cristallisé	36,170	»	63,830	»	»
Bois de hêtre. . .	51,192	»	48,808	»	»
Huile d'olive . . .	77,213	»	10,712	»	12,075.
Résine du Pin . .	75,944	»	15,156	»	8,900.
Matière caséeuse..	57,190	18,352	18,778	»	5,680.
Fibrine	51,675	16,331	26,607	»	5,387.

Les expériences de MM. Gay-Lussac et Thénard sont remarquables par les conclusions suivantes qu'ils en ont tirées :

1°. Une substance végétale est toujours acide, lorsque dans cette substance l'oxigène est à l'hydrogène dans un rapport plus grand que dans l'eau.

2°. Une substance végétale est toujours résineuse ou huileuse, ou alcoolique, toutes les fois que, dans cette substance, l'oxigène est à l'hydrogène dans un rapport plus petit que dans l'eau.

3°. Une substance végétale n'est ni acide ni résineuse, et est analogue au sucre, à la gomme, à l'amidon, au sucre de lait, à la fibre ligneuse, au principe cristallisable de la manne, toutes les fois que, dans cette substance, l'oxigène est à l'hydrogène dans le même rapport que dans l'eau; ainsi, en supposant pour un instant que l'hydrogène et l'oxigène fussent à l'état d'eau dans les substances végétales, les acides végétaux seroient formés de carbone, d'eau et d'oxigène; les résines, les huiles, etc. le seroient de carbone, d'eau et d'hydrogène; enfin le sucre, la gomme, l'amidon seroient seulement formés de carbone et d'eau, et ne différeroient que par les quantités plus ou moins grandes qu'elles en contiendroient.

---

§. III. ANNONCE D'OUVRAGES.

Cours complet de Mathématiques pures, 2 vol. *in*-8°.; par M. FRANCŒUR, ex-élève, l'un des examinateurs temporaires pour l'admission à l'Ecole Polytechnique, etc. PARIS, 1809.

Application de l'Algèbre à la Géométrie; par M. POULLET-DELISLE, ex-élève, professeur de Mathématiques au Lycée d'Orléans; 1 vol. *in*-8°. PARIS, 1809.

Sommaires de quarante-sept Leçons sur le Mouvement des Corps solides, l'Equilibre et le Mouvement des Fluides ; données à l'Ecole Impériale Polytechnique, en 1809, par M. de Prony ; 1 vol. *in*-4°.

Cours de Mécanique, *par M. Poisson.*

1re. *Partie*, comprenant la Statique et les différens Principes de la Dynamique ;
1 vol. *in*-4°. de 159 pages.

2e. *Partie*, comprenant la suite de la Dynamique, l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique (*Cette 2e. Partie est sous presse*).

Nota. Ce Cours n'a encore été imprimé que pour l'usage des Elèves de l'Ecole Polytechnique.

Le 15e. Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique vient de paroître par les soins de MM. Poisson et Hachette, membres de la Commission que le Conseil d'instruction a chargée de l'impression de son Journal. Ce Cahier renferme sept Mémoires d'Analyse de MM. Poisson, Lagrange, Monge, Laplace ; un Mémoire sur la méthode du plus grand commun Diviseur, par M. Bret, ex-élève ; une Notice de M. de Prony sur l'Ecluse de M. de Betancourt, et un Mémoire d'Optique par M. Malus ; 1 vol. *in*-4°., *décembre* 1809.

On imprime en ce moment un nouveau Cahier, qui sera le dixième de la Collection entière et complette du Journal de l'Ecole Polytechnique.

De la Défense des Places fortes.

Ouvrage composé par ordre de Sa Majesté Impériale et Royale, pour l'instruction des Elèves du corps du Génie ; par M. Carnot, ancien officier de ce corps et ancien ministre de la guerre, membre de l'Institut de France et de la Légion d'honneur ;
1 vol. *in*-8. 527 p. Paris, 1810.

Cet ouvrage est divisé en deux parties. Dans la première, on prouve que tout militaire chargé de la défense d'une place doit

périr plutôt que de la rendre ; dans la seconde partie, on indique les moyens que fournit l'industrie pour assurer la meilleure défense des places. L'auteur termine cet ouvrage par la conclusion suivante :

De l'écrit qu'on vient de lire, résulte, je crois, bien évidemment cette vérité tranquillisante ; c'est que les barrières de l'Empire français sont absolument inexpugnables, pour quelque puissance ou réunion de puissances que ce soit, si elles sont bien défendues ; c'est qu'une bonne garnison établie dans l'une de nos places actuelles, et animée du noble désir de s'illustrer par une défense mémorable, peut, aussi long-temps qu'elle se trouvera pourvue de subsistances et de munitions, tenir tête à une armée dix fois aussi nombreuse, et se promettre enfin de la faire échouer, et même de la détruire entièrement, si celle-ci s'obstinoit à vouloir surmonter la résistance.

---

§. IV. PERSONNEL.

M. Fourcroy, instituteur de Chimie à l'Ecole Polytechnique depuis sa création, est décédé le 16 décembre 1809. Les nombreux et utiles services qu'il avoit rendus, comme savant et comme administrateur, lui ont mérité la haute réputation dont il jouissoit, et les éloges que l'amitié et la reconnoissance se sont empressées d'offrir à sa mémoire.

Un décret impérial du 31 mars 1809 avoit autorisé Mr. Gay-Lussac, répétiteur de Chimie à l'Ecole Polytechnique, à prendre le titre de professeur de Chimie-pratique à la même Ecole ; un autre décret du 17 février 1810 nomme M. Gay-Lussac instituteur de Chimie, en remplacement de M. le comte Fourcroy, décédé.

Le même décret nomme M. Thenard professeur de Chimie-pratique, en remplacement de M. Gay-Lussac.

Un autre décret du 7 juillet 1809, nomme M. Lacroix, membre de l'Institut et instituteur d'Analyse à l'Ecole Polytechnique,

examinateur permanent près la même École, en remplacement de M. Bossut.

Le même décret laisse à M. Bossut, comme récompense de ses travaux, la jouissance de son traitement de 6000 fr.

M. Ampère, l'un des inspecteurs-généraux de l'Université et répétiteur à l'Ecole Polytechnique, a été nommé instituteur d'Analyse en remplacement de M. Lacroix, par décret impérial du 28 décembre 1809.

M. Poinsot, ex-élève de l'Ecole Polytechnique et professeur au Lycée Bonaparte, a été nommé le 29 octobre 1809, par S. Exc. M. le Gouverneur, d'après la présentation du Conseil de perfectionnement, pour faire, en remplacement de M. Labey, le Cours d'Analyse aux élèves de la première division.

S. Exc. M. le Gouverneur a nommé, le même jour, M. Binet (Paul-René) répétiteur d'Analyse en remplacement de M. Ampère, et M. Petit (A.-T) adjoint aux répétiteurs, en remplacement *de M. Bazaine*, élève des Ponts et Chaussées, démissionnaire.

M. Arago (Dominique-Franç.-Jean), ancien élève de l'École, membre de l'Institut de France, adjoint au bureau des longitudes, est autorisé, par décision de S. Exc. M. le Gouverneur, en date du 2 janvier 1810, à suppléer M. Monge pendant l'année 1810, toutes les fois que la santé de cet instituteur ne lui permettra pas de faire le cours dont il est chargé.

La présente autorisation a été communiquée au Conseil de perfectionnement dans sa séance du 2 février 1810.

Extrait d'une lettre de M. Livet.

De Warsovie, le 17 octobre 1809.

J'ai l'honneur de vous adresser M. Linsky, Examinateur de l'École d'artillerie et du génie du duché de Warsovie. . . . . .

Je suis actuellement Professeur en chef à l'École d'artillerie et du génie; les Élèves que nous avons cette année étudient avec

autant d'intérêt que de succès la Géométrie descriptive ; nous avons terminé maintenant la théorie des ombres pour commencer incessamment la perspective. . . . . . .

J'ai rencontré en Pologne beaucoup d'Élèves de l'École Polytechnique ; je suis particulièrement lié avec deux anciens Élèves de cette École, MM. les Colonels Malet et Bontemps, dont le premier est Directeur du génie, et le deuxième de l'artillerie.

On a fait connoître (pag. 32 de ce volume de la Correspondance, n°. 1) les noms des trois anciens Élèves promus à l'époque de janvier 1809 au grade d'ingénieur en chef des ponts et chaussées ; M. Lesage, inspecteur de l'École impériale des ponts et chaussées a eu la bonté de communiquer les noms de ceux qui ont obtenu, cette année (1810), le même grade ; ils sont au nombre de trois :

1°. M. Fèvre (J.-B.-Simon). *Voyez* le 1er. volume de la Correspondance, page 99.

2°. M. Garella (Hyacinthe). *id.* 107.

3°. M. Cavenne (Franç.-Alexandre). *id.* 93.

Extrait du rapport lu par M. Biot *à la Séance publique de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Institut, du 2 janvier 1810, sur les opérations faites en Espagne pour prolonger la Méridienne de France jusqu'aux Iles Baléares.*

. . . .

Tandis que nous suivions paisiblement en France la série des travaux et des calculs qui devoient compléter l'opération et en faire connoître le résultat définitif, M. Arago avoit été beaucoup moins heureux. Tant qu'il n'avoit eu à vaincre que les obstacles de la nature, les progrès de son entreprise avoient répondu à sa constance et à son habileté. Déjà il avoit terminé les triangles qui devoient lier Yvice à Mayorque et faire connoître l'arc de parallèle terrestre compris entre ces deux stations. Il s'étoit transporté à Mayorque avec M. Rodriguez, et aussitôt il avoit été s'établir sur le sommet d'une haute montagne, nommée le

Puch de Galatzo. Déjà il avoit observé les signaux d'Yvice et un assez grand nombre de passages d'étoiles à la lunette méridienne pour déterminer la différence des longitudes. Quelques jours encore, et le résultat de ces observations étoit invariablement fixé. Mais tout-à-coup le bruit se répand parmi le peuple que ces instrumens, ces feux, ces signaux ont pour objet d'appeler l'ennemi, de le diriger vers l'île et de lui montrer le chemin. Ce n'est plus qu'un cri de trahison et de mort. On veut aller à Galatzo en armes : heureusement M. Arago avoit été averti. Vêtu en paysan mayorquain, il part pour Palma, emportant avec lui ses observations, qui renfermoient déjà les élémens nécessaires pour le calcul de deux degrés de longitude. Arrivé à Palma, sans être aperçu, il se rend à bord de notre vaisseau, y reste deux jours caché, et cependant dépêche un bâtiment et des soldats à la cabane pour sauver et ramener les instrumens que les paysans engagés à son service avoient fidèlement gardés. Mais bientôt lui-même est en proie à de nouvelles alarmes. Le vaisseau où il s'étoit retiré n'est plus un asyle inviolable. Soit trahison, soit foiblesse, l'officier espagnol qui le commandoit, et qui jusqu'alors s'étoit montré notre ami, ne voulut, malgré ses promesses, ni protéger M. Arago, ni le conduire en France. Le capitaine-général ne parvint à le sauver qu'en l'enfermant dans la citadelle. C'est là qu'il resta plusieurs mois prisonnier, ayant non-seulement à regretter sa liberté, mais à craindre souvent pour sa vie. Une fois des moines fanatiques tentèrent de corrompre les soldats de garde, et les engagèrent à se défaire de lui. Cependant notre bon et digne ami M. Rodriguez ne l'abandonnoit pas dans son infortune. Incapable de manquer à l'amitié et à l'honneur, il alloit par-tout priant, pressant, fatiguant la junte par de continuelles démarches, demandant hautement la liberté de son collègue, et représentant l'injustice de sa détention ; enfin, il obtint sa délivrance. On permit à M. Arago de passer à Alger sur une petite barque. Il y fut conduit par un de nos matelots mayorquains, l'un des plus expérimentés marins de l'Espagne, et qui nous avoit toujours témoigné un attachement sans bornes et un dévouement absolu.

Arrivé dans cette ville, M. Arago est accueilli par le consul de France, M. Dubois-Thainville, qui le comble de bontés; bientôt il s'embarque sur une petite frégate de commerce algérienne pour revenir en France. Après la navigation la plus heureuse, il arrive en vue de Marseille ; il se croyoit déjà dans le port, lorsqu'un corsaire espagnol voyant ce navire entrer dans un port français, l'attaque, le prend et l'emmène avec lui à Roses. M. Arago pouvoit échapper encore ; il étoit porté sur la

rôle des passagers comme négociant allemand : mais par le hasard le plus funeste, un des matelots qui avoit été autrefois sur notre bord se trouvoit sur celui du corsaire ; une exclamation lui échappe, M. Arago est reconnu et plongé avec tous ses compagnons dans la plus affreuse captivité.

Je ne dirai point ce qu'il eut à souffrir. Bientôt le Dey d'Alger fut informé de l'insulte faite à son pavillon. Il en demanda une réparation éclatante, exigea que le bâtiment, l'équipage, les marchandises et tous les passagers fussent rendus, menaçant, en cas de refus, de déclarer la guerre. Il fallut bien céder à ces vives réclamations. M. Arago se rembarque. Le bâtiment fait voile pour Marseille. On est de nouveau à la vue du port, lorsqu'une affreuse tempête du nord-ouest repousse le vaisseau avec une force irrésistible, le chasse et le jette sur les côtes de Sardaigne. C'étoit un autre péril. Les Sardes et les Algériens sont en guerre : aborder, c'est retomber dans une nouvelle captivité. Malgré une voie d'eau considérable on se décide à se réfugier sur les côtes d'Afrique ; et le bâtiment, prêt à couler bas, aborde enfin dans le petit port de Bougie, à trois journées d'Alger.

Là on apprend que le dey, qui les avoit si fortement protégés contre les Espagnols, a été tué dans une émeute. Un autre dey est à sa place. On visite soigneusement le navire entrant. Le poids des caisses qui renfermoient les instrumens astronomiques excite de violens soupçons. Que peuvent-elles contenir de si pesant, si ce n'est de l'or? Pourquoi prendroit-on tant de précautions afin d'empêcher de les ouvrir, si elles renfermoient autre chose que des sequins? Ne pouvant obtenir qu'on les lui rende, et ne se fiant point aux incertitudes d'une négociation barbaresque, M. Arago s'habille en turc, et associé à quelques autres personnes, sous la conduite d'un saint du pays, que l'on appelle un Marabou, il se rend par terre à Alger, à travers les montagnes. Je laisse à penser avec quels périls. Le consul, bien étonné de le revoir dans cet équipage, l'accueille avec la même bienveillance que la première fois. Les instrumens sont officiellement réclamés. Les Algériens, convaincus qu'ils ne sont pas d'or, mais de cuivre, ne leur trouvent plus aucune valeur et les rendent. Mais les occasions de retour étoient devenues rares et difficiles ; il fallut rester à Alger pendant six mois. Enfin le consul lui-même, rappelé à Paris par l'Empereur, s'embarque avec sa famille, et M. Arago s'embarque avec lui, sur un bâtiment de guerre au service de la régence ; plusieurs bâtimens de commerce les accompagnoient. Arrivés en vue de Marseille, ils sont encore rencontrés par une division anglaise, infiniment supérieure, qui leur ordonne de se rendre à Minorque. Tous

obéissent à la force; tous, excepté le bâtiment où M. Arago étoit embarqué : le capitaine, plus hardi que les autres, profite d'un coup de vent favorable, tend ses voiles et entre à Marseille.

C'étoit là que tant de traverses devoient finir. M. Arago, de retour, a reçu le prix de ses travaux. Il occupe aujourd'hui à l'Institut, dans la section d'astronomie (1), une place qu'il a bien méritée. Le récit de ses aventures prouve qu'en servant les sciences, on peut aussi rencontrer des entreprises hasardeuses et des périls honorables.

L'Académie Ionienne établie à Corcyre compte parmi ses membres plusieurs anciens Élèves, MM. Augoyat, capitaine du Génie militaire, Membre de la Légion-d'Honneur; Arnaud, Ingénieur de Marine en chef dans les Sept-Iles; Dupin, Capitaine du Génie maritime et Secrétaire de l'Académie pour la langue française.

L'Académie a tenu sa première séance publique le 15 août 1808, jour de Saint-Napoléon : cette année correspond à la 1re. de la 647me Olympiade.

Les Examinateurs d'admission à l'École Polytechnique qui ont été nommés par S. E. M. le Gouverneur, pour le Concours de 1809, sont :

	MM.
Paris.	DINET.
Tournée du Sud-Ouest	LABEY.
Tournée du Nord.	REYNAUD.
Tournée du Sud-Est.	FRANCŒUR.

Les examens ont été ouverts le 5 août 1809, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre, même année.

(1) S. M. l'Empereur a confirmé cette nomination le 4 octobre 1809, au Camp impérial de Schœnbrunn.

§. V. CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

La dixième session du Conseil de perfectionnement a été ouverte le 20 octobre 1809, et a été terminée le 2 février 1810.

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'École, Président.

S. E. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics; membres désignés par la loi.

MM. Legendre, Lacroix, Vauquelin, Malus.

Membres de l'Institut, pris, selon la loi, dans la classe des sciences physiques et mathématiques.

MM. Berthollet, Laplace, Lagrange.

Désignés par S. E. le Ministre de la Guerre.

MM. Thirion, inspecteur-adjoint d'artillerie de la marine; Allent, chef de bataillon du génie; Poissant, chef de bataillon au corps impérial des ingénieurs-géographes.

Désignés par S. E. le Ministre de la Marine.

MM. Sugny, inspecteur-général d'artillerie de la marine; Sané, inspecteur-général du génie maritime.

Désignés par S. E. le Ministre de l'Intérieur.

MM. Prony, inspecteur-général des Ponts et chaussées; Lefebvre, membre du conseil des mines.

Directeur des études de l'École Polytechnique.

M. de Vernon.

Commissaires choisis par le Conseil d'instruction de l'École Polytechnique parmi ses membres.

MM. Guyton, Hassenfratz, Vincent, Poisson.

Quartier-Maître de l'École Polytechnique, Secrétaire.

M. Marielle.

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 167 *Candidats admis à l'École impériale Polytechnique, suivant la décision du Jury du* 28 *septembre* 1809.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
André.	Louis-Auguste.	Troyes.	Aube.
Andrieu.	Bonnet.	Bordeaux.	Gironde.
Barbedette.	Siméon-Pierre-Jean.	Hédé.	Ille-et-Vilaine.
Bardonnaut	Jean-Nicolas-Marcelin.	Langres.	Haute-Marne.
Barthes.	Jean-Etienne-Frédéric-Marie.	Saint-Felix.	Haute-Garonne.
Bastide.	Jean-Antoine-Sébastien	Gropierres.	Ardêche.
Baumal.	Rodolphe-Constant-Justin-Prosper.	Douay.	Nord.
Beaudemoulin.	Louis-Alexis.	Paris.	Seine.
Bédigie.	Pierre-Franç.-Gabriel.	Paris.	Seine.
Benoit.	Philippe-Martin-Narcisse.	Saint-Pons.	Hérault.
Berthault.	Claude-Jean-Baptiste-Alexandre.	Châl.-sur-Saône.	Saône-et-Loire.
Berthelot de la Durandière.	Joseph-Eugène.	Le Puits-Saint-Bonnet.	Deux-Sèvres.
Besson.	Auguste-David-Just-Antoine.	Grenoble.	Isère.
Besuchet.	Anne François-Joseph.	Salins.	Jura.
Binet.	Philippe-Thomas.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Blanchard.	Joseph.	Briançon.	Hautes-Alpes.
Blondat.	Antoine-Gabr.-Franç.	Troyes.	Aube.
Boileau.	Jean-Guillaume.	Soissons.	Aisne.
Boistard.	Achille.	Melun.	Seine-et-Marne.
Bonnier.	Emile-Julien-Joseph.	Lille.	Nord.
Bonnière.	André-Louis-Eugène.	Boulogne.	Pas-de-Calais.
Bourrousse-Laffore.	Jacques-Samuel.	Laplume.	Lot-et-Garonne.
Bourrousse-Laffore.	Martial-Augustin.	Laplume.	Lot-et-Garonne.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Boussac.	Paulin-Joseph-Gustave.	Layrac.	Lot-et-Garonne.
Boylesve.	Etienne.	Sain t-Hilaire.	Vendée.
Broquard de Bussi're.	Charles-Franç.-Joseph.	Besançon.	Doubs.
Cabrol.	Robert - Pierre-Barthélemy.	Rodez.	Aveyron.
Cardon.	Louis-Dominiq.-Marie	Chatillon - sur-Chalaronne.	Ain.
Castel.	Arthur-Clément-Marie.	Paris.	Seine.
Cauvet de Longrais.	Alfred-Eugène-Alderic.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Challaye.	Alphonse-François.	Montereau.	Seine-et-Marne.
Chancel.	Jean-Edmond.	Angoulême.	Charente.
Chapuy (1).	Nicolas-Marie-Joseph.	Paris.	Seine.
Chateaurenaud.	Joseph-Hippolyte.	Angers.	Maine-et-Loire.
Chayé.	Dieudonné.	Paris.	Seine.
Chouillou.	Jean-Victor.	Paris.	Seine.
Claudel.	Jean.	Epinal.	Vosges.
Cotelle.	Barnabé.	Briare.	Loiret.
Courant.	Pierre-Lamb.-Florence.	Lisieux.	Calvados.
Crémoux.	Pierre.	Périgueux.	Dordogne.
Crestin Doussières.	Eug.-Franç.-Jean-Bap.	Arbois.	Jura.
Cunier:	Hippol. - Louis-Amour.	Valenciennes.	Nord.
Daigremont.	Joseph-Honoré-Desiré.	Cambrai.	Nord.
Daniel.	Henri-Frédéric.	Grangues.	Calvados.
David.	Jean-Baptiste.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Decaïeu.	Philippe-Louis.	Oisemont.	Somme.
De Chastelus.	Jean-Claude-Hilaire.	Saint Priest-Laroche.	Loire.
Delagrye.	François-César.	Renaison.	Loire.
Delamorinière.	Jean-François-Henry.	Meudon.	Seine-et-Oise.
Delarue.	Armand.	Carentan.	Manche.
Depigny.	Jean-Pierre.	Carouge.	Léman.
Desbrochers.	Réné.	Vaudroncourt.	Moselle.
Desmaretz de Palis.	Eug. Ch.-Nicol.-Marie.	Palis.	Aube.
D'harnois.	Adolphe-Charles-François.	Fécamp.	Seine-Inférieure.
Dissandes-Monlevade.	Jean-Antoine.	Gueret.	Creuse.
Doucet.	Guillaume.	Tours.	Indre-et-Loire.
Douzon (2).	Jean.	Villeneuve.	Lot-et-Garonne.

(1) M. Chapuy avoit déjà été admis en 1806, mais il n'avoit pas rejoint.

(2) M. Douzon avoit déjà été admis en 1807; il s'étoit retiré le 23 septembre 1808.

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 167 Candidats admis à l'École impériale Polytechnique, suivant la décision du Jury du 28 septembre 1809.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
André.	Louis-Auguste.	Troyes.	Aube.
Andrieu.	Bonnet.	Bordeaux.	Gironde.
Barbedette.	Siméon-Pierre-Jean.	Hédé.	Ille-et-Vilaine.
Bardonnaut	Jean-Nicolas-Marcelin.	Langres.	Haute-Marne.
Barthes.	Jean-Etienne-Frédéric-Marie.	Saint-Felix.	Haute-Garonne.
Bastide.	Jean-Antoine-Sébastien	Gropierres.	Ardêche.
Baumal.	Rodolphe-Constant-Justin-Prosper.	Douay.	Nord.
Beaudemoulin.	Louis-Alexis.	Paris.	Seine.
Bédigie.	Pierre-Franç.-Gabriel.	Paris.	Seine.
Benoit.	Philippe-Martin-Narcisse.	Saint-Pons.	Hérault.
Berthault.	Claude-Jean-Baptiste-Alexandre.	Châl.-sur-Saône.	Saône-et-Loire.
Berthelot de la Durandière.	Joseph-Eugène.	Le Puits-Saint-Bonnet.	Deux-Sèvres.
Besson.	Auguste-David-Just-Antoine.	Grenoble.	Isère.
Besuchet.	Anne François-Joseph.	Salins.	Jura.
Binet.	Philippe-Thomas.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Blanchard.	Joseph.	Briançon.	Hautes-Alpes.
Blondat.	Antoine-Gabr.-Franç.	Troyes.	Aube.
Boileau.	Jean-Guillaume.	Soissons.	Aisne.
Boistard.	Achille.	Melun.	Seine-et-Marne.
Bonnier.	Emile-Julien-Joseph.	Lille.	Nord.
Bonnière.	André-Louis-Eugène.	Boulogne.	Pas-de-Calais.
Bourrousse-Laffore.	Jacques-Samuel.	Laplume.	Lot-et-Garonne.
Bourrousse-Laffore.	Martial-Augustin.	Laplume.	Lot-et-Garonne.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Boussac.	Paulin-Joseph-Gustave.	Layrac.	Lot-et-Garonne.
Boylesve.	Etienne.	Sain t-Hilaire.	Vendée.
Broquard de Bussière.	Charles-Franç.-Joseph.	Besançon.	Doubs.
Cabrol.	Robert - Pierre-Barthélemy.	Rodez.	Aveyron.
Cardon.	Louis-Dominiq.-Marie	Chatillon - sur-Chalaronne.	Ain.
Castel.	Arthur-Clément-Marie.	Paris.	Seine.
Cauvet de Longrais.	Alfred-Eugène-Alderic.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Challaye.	Alphonse-François.	Montereau.	Seine-et-Marne.
Chancel.	Jean-Edmond.	Angoulême.	Charente.
Chapuy (1).	Nicolas-Marie-Joseph.	Paris.	Seine.
Chateaurenaud.	Joseph-Hippolyte.	Angers.	Maine-et-Loire.
Chayé.	Dieudonné.	Paris.	Seine.
Chouillou.	Jean-Victor.	Paris.	Seine.
Claudel.	Jean.	Epinal.	Vosges.
Cotelle.	Barnabé.	Briare.	Loiret.
Courant.	Pierre-Lamb.-Florence.	Lisieux.	Calvados.
Crémoux.	Pierre.	Périgueux.	Dordogne.
Crestin Doussières.	Eug.-Franç.-Jean-Bap.	Arbois.	Jura.
Cunier.	Hippol. - Louis-Amour.	Valenciennes.	Nord.
Daigremont.	Joseph-Honoré - Desiré.	Cambrai.	Nord.
Daniel.	Henri-Frédéric.	Grangues.	Calvados.
David.	Jean-Baptiste.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Decaïeu.	Philippe-Louis.	Oisemont.	Somme.
De Chastelus.	Jean-Claude-Hilaire.	Saint Priest-La-roche.	Loire.
Delagrye.	François-César.	Renaison.	Loire.
Delamorinière.	Jean-François-Henry.	Meudon.	Seine-et-Oise.
Delarue.	Armand.	Carentan.	Manche.
Depigny.	Jean-Pierre.	Carouge.	Léman.
Desbrochers.	Réné.	Vaudroncourt.	Moselle.
Desmaretz de Palis.	Eug. Ch.-Nicol.-Marie.	Palis.	Aube.
D'harnois.	Adolphe-Charles-François.	Fécamp.	Seine-Inférieure.
Dissandes - Monlevade.	Jean-Antoine.	Gueret.	Creuse.
Doucet.	Guillaume.	Tours.	Indre-et-Loire.
Douzon (2).	Jean.	Villeneuve.	Lot-et-Garonne.

(1) M. Chapuy avoit déjà été admis en 1806, mais il n'avoit pas rejoint.

(2) M. Douzon avoit déjà été admis en 1807; il s'étoit retiré le 23 septembre 1808.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Drappier.	Adolphe-Auguste.	Pont-Audemer.	Eure.
Dreppe.	Charles-Frédéric.	St.-Pol-de-Léon.	Finistère.
Dubois.	Antoine-Louis.	Paris.	Seine.
Dubuz.	François-Jacques.	Paris.	Seine.
Ducy.	Charles-Auguste.	Hectomare.	Eure.
Dufilhol.	Louis-Antoine.	L'Orient.	Morbihan.
Dufour.	François-Jules-Isaac.	Abbeville.	Somme.
Dupont.	Pierre-Jacques-Amand.	Maëstricht.	Meuse-Infér.
Duport.	Antoine-Pierre.	Brest.	Finistère.
Duron.	François.	Pont-à-Mousson.	Meurthe.
Fauquez.	Auguste-Armand.	Montereau.	Seine-et-Marne.
Fessard.	Paul.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Frotier de la Messelière.	Charles.	Poligny.	Vienne.
Gallice.	Barthélemy.	Monestier.	Hautes-Alpes.
Gay.	Louis-Marie.	La Mothe-Saint-Jean.	Saône-et-Loire.
Gibou.	Antoine - Alexandre - Frédéric.	Auxonne.	Côte-d'Or.
Gilbert de Gourville.	Jean.	La Rochelle.	Charente-Infér.
Goblet.	Albert-Joseph.	Tournay.	Jemmape.
Gonet.	Louis - Joseph - Bonaventure.	Pont-de-Vaux.	Ain.
Goy.	Jean-Louis-Alexandre.	Orgelet.	Jura.
Griffet-Labaume	Gilbert-Charles.	Roanne.	Loire.
Gueze.	Alexandre-Florimond.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Henry.	Pierre-Valentin.	Villedieu - en-Fontenelle.	Haute-Saône.
Hérault.	Jean-Adelle.	Paris.	Seine.
Herval.	Jean - Charles - Amant-Fidèle.	Paris.	Seine.
Hetzrodt.	Pierre-Joseph.	Trèves.	Sarre.
Juncker.	Chrétien-Auguste.	Obenheim.	Bas-Rhin.
Kersaint (Coët Nempren.)	Armand-Guy-Charles.	Saint-Denis.	Seine.
Ketelbuter.	Eugène-Alb. -Edouard-Alphonse.	Bruxelles.	Dyle.
Labarrière.	Joseph-Frédéric.	Lautrec.	Tarn.
Lacroix.	Antoine-Pierre-Hippol.	Paris.	Seine.
Lambert.	Charles.	Paris.	Seine.
Lancelin.	Gilles-Marie.	Brest.	Finistère.
Latour.	Benjamin-Alexandre.	Machecoul.	Loire-Inférieure.
Laval (1).	[illegible]ques-Raymond.	Pergain.	Gers.
Lavallée (2).	[illegible]re.	Isle Bouchard.	Indre-et-Loire.
Lefebvre.	[illegible]is-Henry.	Rheims.	Marne.

(1) M. Laval avoit déjà été admis en 1808, mais il n'avoit pas rejoint.
(2) M. Lavallée, *idem*.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Legrand.	Baptiste-Alexis-Victor.	Paris.	Seine.
Le Grix.	Pierre-Félix.	Le Hâvre.	Seine-Inférieure.
Lelièvre.	Bertrand-Hugues.	Paris.	Seine.
Lemoine.	François.	Stigny.	Yonne.
Lemoyne.	Jean-Jacques.	Saint-Pierre-de-Juilliers.	Charente-Infér.
Lendy.	Armand-Louis-Frédéric-René.	Courbevoye	Seine.
Le Prince.	Paul.	Laval.	Mayenne.
Lesecq.	Aug.-Jean-Catherine.	Paris.	Seine.
Letard de Labouralière.	Pierre-Jean-Bertrand-Delphin.	Richelieu.	Indre-et-Loire.
Lethierry.	Joseph-Desiré.	Lille.	Nord.
Levillain.	Marie-François-Denis.	Essay.	Orne.
Liébaut.	Nicolas-Franç.-Joseph.	Dombasle.	Meurthe.
Liénard.	Alexandre.	Bayeux.	Calvados.
Limousin.	Noël.	Angoulême.	Charente.
Loreilhe.	Jean.	Sainte-Foix.	Gironde.
Louis.	Joseph.	Issoudun.	Indre.
Maignen.	Jean-Jacques.	Paris.	Seine.
Marquis.	Donatien.	Chambly.	Oise.
Martin.	Joseph-Matthieu.	Mayence.	Mont-Tonnerre.
Menot.	Gabriel-Julien.	Vailly.	Aisne.
Merle.	Félicité-Charles-Prudent.	Bagé-le-Châtel.	Ain.
Messey.	Louis-Auguste.	Braux-le-Châtel.	Haute-Marne.
Millon.	Antoine.	Châl.-sur-Saône.	Saône-et-Loire.
Mimerel.	Armand-Florimond.	Amiens.	Somme.
Molina.	Jean-Vincent-Augustin.	Virle.	Pô.
Mondot.	André-Joseph-Jules.	La Souterraine.	Creuse.
Monneret.	Alexandre-Adrien-Joseph.	Douay.	Nord.
Morel.	Amédée-Edme.	Pontoise.	Seine-et-Oise.
Morel Duesme.	Marie-Franç.-Frédéric.	Dijon.	Côte-d'Or.
Mosca.	Charles-Bernard.	Occhieppo supérieur.	Sésia.
Nosereau.	Gabriel.	Loudun.	Vienne.
Odiot.	Joseph-Marie.	Paris.	Seine.
Ollivier.	Jean-Baptiste-Victor.	Aprey.	Haute-Marne.
Parentin.	Antoine-Joseph.	Paris.	Seine.
Parrot.	Eberhard-Louis.	Montbéliard.	Haut-Rhin.
Pastey.	Pierre-Jean.	Paris.	Seine.
Patas de Mesliers.	Jacques-Omer.	Orléans.	Loiret.
Peltier.	Charl.-Éloi-Ferdinand-François-Xavier.	Bouzonville.	Moselle.
Perruchot-Longeville.	Desiré-Louis-Rose.	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Petin.	Etienne-Louis-Simon.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Pey.	Jean.	Bayonne.	Basses-Pyrénées.
Philippé.	Joseph-Prudent.	Chambéry.	Mont-Blanc.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Pichot-Lamabilais.	Pierre-Jean-Baptiste.	Landerneau.	Finistère.
Picerron de Mondésir.	Auguste-Jean-Marie.	Paris.	Seine.
Policarpe.	Antoine-Pierre.	Carcassonne.	Aude.
Poullain.	Jean.	Paris.	Seine.
Poumeyrol.	Joseph.	Fonceigner.	Dordogne.
Prévôt-Longpérier.	Jean-Baptiste-Gabriel.	Lagny-le-Sec.	Oise.
Prié.	Antoine-Jean-Solange.	Grenoble.	Isère.
Proust.	Paul-François.	Niort.	Deux-Sèvres.
Prus.	Jean-Charles.	Noyon.	Oise.
Radepont.	Jean-Baptiste-Louis-François.	Auxonne.	Côte-d'Or.
Rainguel.	Charles-Victor-Emond.	Faucogney.	Haute-Saône.
Raucourt.	Antoine.	Charleville.	Ardennes.
Rely.	Charles-Franç.-Amour-Constant.	Metz.	Moselle.
Roget.	Nicolas.	Paris.	Seine.
Rollandy.	Joseph-Pierre-Paul.	Lurs.	Basses-Alpes.
Saucourt.	Jean-François.	Reims.	Marne.
Sauvageot.	Antoine-Gabriel.	Paris.	Seine.
Schneider.	Théodore.	Rouffach.	Haut-Rhin.
Sirveaux.	Brice-François.	St.-Bresson.	Haute-Saône.
Solier.	Antoine-Joseph-Jean.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône
Tascher.	Eugene-Jean-Marie.	Orléans.	Loiret.
Trona.	Victor-Emm.-Joseph-Augustin-Jean-Marie.	Turin.	Pô.
Trotté-Laroche.	Pierre.	Le Mans.	Sarthe.
Urban.	Perpétue-Joseph-Louis.	Dinant.	Samb.-et-Meuse.
Vallot.	Jean-Charles.	Paris.	Seine.
Vanéechout.	Benj.-Aubert-Ernest.	Saint-Omer.	Pas-de-Calais.
Vieillard.	Narcisse.	Paris.	Seine.
Vincens.	Joseph-Marie.	Lavaur.	Tarn.
Willmar.	Jean-Pierre-Christine.	Luxembourg.	Forêts.
Yver *dit* Labruchollerie.	Louis.	Carentan.	Manche.
Zédé.	Pierre.	Périgueux.	Dordogne.

CONCOURS DE 1809.

Le jury d'admission de l'École Impériale Polytechnique a prononcé, le 28 septembre 1809, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année ;

Trois cent quatre-vingt-deux candidats ont été examinés, tant à Paris que dans les départemens. Sur ce nombre, trente-trois

ont été exclus du concours, comme n'ayant pas satisfait aux conditions du programme relatives au dessin et aux connoissances exigées dans les langues française et latine ;

Vingt-cinq, qui n'ont pas parfaitement satisfait à ces conditions, ont été placés dans un rang moins bon que celui auquel leur instruction dans les sciences mathématiques leur donnoit droit de prétendre.

Le nombre des candidats admis par le jury a été de 167.

Nombre des candidats examinés en 1809, 382, savoir :

A Paris.	131	} . . . 382
Dans les départemens . .	251	

Nombre des candidats admis en 1809, 167, savoir :

A Paris.	66	} 167
Dans les départemens. . .	101	

Nombre des Élèves admis jusqu'au 1er. novembre 1808.	2139
Total des élèves admis à l'École depuis son établissement	2306

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Le jury présidé par M. le Gouverneur, et composé des deux Examinateurs permanens, MM. Legendre et Lacroix, et des Examinateurs temporaires, MM. Vauquelin et Malus, a arrêté, le 30 septembre 1809, les listes suivantes, par ordre de mérite ; savoir :

Artillerie de terre. MM. Bouteiller, Chonet-Bollemont, Abbate, Gentil *dit* Maurin, Casterat, Berjaud, Roussot, Lefranc, Vialay, Pasquier, Martin, Souhait (C.-P.), Rigal (H.), Audoury, Gauthier, Picher-Grandchamp, Donat, Victor, Leudet, Debooz, Dumotet, Dalençon, Gellibert, Gay de Vernon, Brémard, Fayon, Rigal (P.), Ramadou, Hervé, Leboulanger, Souhait (M. L. J.), Michaux, Géant, Brière de Mondétour, Lapene, Lesterpt, Colliot de la Hattays, Ménard, Varin de Beautot, Cloquemin, Courand, Burcy, Leguay-

Delavigne, Leroy (J.), Auricoste de Lazarque, Romagnie, Larigaudie, Mardochée (Eugène), Salomon, Ducos-Lahitte, Vimal-Teyras, Bauyn, Esperonnier, Lallement, Pichard, Lassus *dit* Marcilly, Bousson, Mardochée (Gustave) Lacoste, Piron, Rosselin, Baillot, Gallez, Vongoefft, Legendre, Castel, Levy (Feistel), Gourousseau, Doisy-Villargennes, Soulié, Levie (A. T.), Lebourg, Saussine, Lanty, Delon, Ducros St.-Germain, Gilart-Larchantel, Bergery, Ledenmat-Kervern, Duboy, Lombard de Ginibral, Billoin, Baulu, Darcel, Pellegrin, Laniepce-Jeufosse. 86

Artillerie de mer. MM. Michel (Jules), Grillet, Gerus, Georges, Zeni. 5

Génie militaire. MM. Stucker, Divory, Dufour, Basselier, Perrin, Gérard, Desjardins-Gerauvillier, Moréal, Montmasson, Vaillant, Beurnier, Clerici, Massillon, Prévost-Gagemon, Massu, Michel (Jean), Savary, Legrand, Juhel, Castagné, Bergère, Nicolas, David St.-Georges, Monmartin, Levavasseur. 25

Ponts et Chaussées. MM. Bourguignon-Duleau, Fresnel, Lacordaire, Panichot, Sénéchal, Lemasson, Leblanc, Vinard, Kermel, Deroys-Saint-Michel, Poulle. 11

Mines. MM. Poirier *dit* Saint-Brice, Dubosc. 2

Construction des vaisseaux. MM. Mazaudier, Laimant, Chanot, Dumonteil, Lebreton, Lefebure de Cerisy. . . 6

Géographes. MM. Montalant, Laurencin, Foulard, Porlodec-Lanvarzin. 4

Poudres et salpêtres. MM. Maguin et Labiche (1). . . 2

Instruction publique. M. Petit (A. T.). 1

Admis dans les troupes de ligne en qualité de sous-lieutenans.

MM. Devère, Gallot, Hecquet, Hyman, Louis, Moret, Nantil, Poulain (F. N.), Raigniac, Rambaud, Schérer, Travers. 12

(1) Le concours pour ces deux places d'élèves des poudres a été ouvert le 10 août 1809, au lieu des séances de l'administration générale des poudres et salpêtres, conformément à la loi du 27 fructidor an 5 (13 septembre 1797); M. le sénateur Monge étant absent de Paris, pour cause de santé, S. E. le Ministre de la guerre a chargé M. Hachette de le remplacer dans les fonctions d'examinateur; le Ministre a nommé, sur la proposition de M. Hachette, MM. Maguin et Labiche, Élèves des poudres et salpêtres.

Démissionnaires.

MM. Geoffroy - Durouret, Gouvello, Lachèze, Laval, Lavallée, Mauviel, Petit (J.-B-J.), Rondeau - Martinière, Simonot - Vertenay. 9

Mort.

M. Buisson. 1

État de situation des Elèves de l'Ecole Impériale Polytechnique, à l'époque du 1er novembre 1809; et résultat des opérations des jurys d'admission dans les services publics, de passage de la seconde division à la première, et d'admission à l'Ecole.

L'Ecole étoit composée, le 1er novembre 1809, de 330 élèves;

SAVOIR:

Première division.	151	. . . 330 Elèves.
Seconde division.	179	

Elle a perdu dans le cours de l'année,

Mort (1re. division)			1	164
Démissionnaires	1re. division.	4	9	
	2e. division.	5		
Passés sous-lieutenans dans la ligne	1re. division.	3	12	
	2e. division.	9		
Admis pour les services publics.				
Artillerie de terre.		86	141	
Artillerie de mer		5		
Génie militaire.		25		
Ponts et chaussées		11		
Mines.		2		
Construction des vaisseaux. . .		6		
Géographes.		4		
Poudres et salpêtres.		2		
Admis dans l'instruction publique. . .			1	

Au 1er. novembre 1808, l'école restoit composée de 166 Élèves ;

SAVOIR :

Première division	1	166
Seconde division	165	

Le Jury a pensé que sur les 165 Elèves qui composoient la deuxième division, 155 (1) étoient susceptibles de passer à la première, et que 10 devoient faire une seconde année dans cette division. Il en est résulté que la nouvelle première division s'est trouvée composée de 156 Elèves.

Ajoutant aux 166 Elèves qui restent à l'Ecole, les 167 qui ont été admis au concours de cette année, ci 167

L'Ecole s'est trouvée composée au 1er. novembre 1809, de. . . . . 333 Elèves.

SAVOIR :

Première division	156	333
Deuxième division.	177	

§. VI. ACTES DU GOUVERNEMENT.

S. Exc. le Gouverneur a arrêté les changemens suivans dans l'uniforme des Elèves (2).

Grand Uniforme. Les revers blancs ont été remplacés par des revers bleus ;

La veste et la culotte de drap blanc, par une veste et une culotte de drap bleu en hiver, une veste de basin uni et une culotte bleue en été.

Les guêtres blanches par des guêtres noires.

Petit Uniforme. La doublure bleue a été remplacée par une doublure écarlate.

(1) Y compris M. Beck, Hollandais de naissance, que le Conseil de perfectionnement a autorisé à suivre les cours de la première division, sans pouvoir concourir pour les services publics. (*Voyez* pag. 376, 1er. volume).

(2). *Voyez* l'uniforme adopté le 3e. jour complémentaire an 13, no. 5, vol. Ier. pag. 163.

S. Exc. le Ministre de la guerre, d'après l'ordre de S. M. l'Empereur et Roi, a nommé, le 27 janvier 1810, M. le Colonel d'artillerie Greiner, commandant du bataillon de l'Ecole Polytechnique, en remplacement de M. le Chef de bataillon Davignon qui a obtenu sa retraite.

Par décret du 3 janvier 1810, S. M. a nommé S. Exc. M. le Comte de Cessac Ministre de l'Administration de la Guerre.

Article omis page 422 du Ier. volume de la Correspondance.

Ajoutez après l'équation,

$$Pz^2 = \frac{MN\phi''^2 - (M+N\phi'^2)^3}{MN''\phi^2}, \text{ ce qui suit :}$$

quand la surface est de révolution, on a $M=N$, et cette dernière équation devient:

$$Pz^2 = 1 - \frac{M(1+\phi'^2)^3}{\phi''^2}. \qquad \text{(E)}.$$

ADB (fig. 10, planche du n°. 6, relative à l'article, pag. 195 du 1er volume) étant une cycloïde rapportée à deux axes perpendiculaires entre eux qui se coupent au point *A*, origine de la courbe, et comptant les abscisses α, à partir du point *A* sur la droite *AB* et les ordonnées $\phi\alpha$ perpendiculairement à cette droite, on a pour l'équation différentielle de la cycloïde $\phi' = \sqrt{\frac{2a-\phi}{\phi}}$, a est le rayon du cercle générateur de la cycloïde; prenant cette cycloïde pour la courbe directrice du centre de la surface du second degré de révolution, l'équation (E) devient, d'après l'équation de la cycloïde, $Pz^2 = 1 - 8Ma\phi$; l'équation $y - \phi = \frac{M+N\phi'^2}{N\phi''}$, donne $y = -\phi$; éliminant ϕ, on a :

$$Pz^2 = 1 + 8May$$

ce qui prouve, etc. (*Suit l'article de M.* Livet, *pages* 422—427).

ERRATA.

1.er volume, page 98, ligne 19,

Au lieu de Boullanger, ingénieur-hydrographe;

Lisez : Le Boullenger..., ponts et chaussées.

Idem, pag. 377, lig. 4,

Au lieu de Cartier (Félix);

Lisez : Cartier *dit* Félix (Jean-Dominique-Arnaud).

2.e volume, pag. 41, lignes 5, 6 et 7,

MM. Bouché (G. F. E.), Deprez de Crassier et Petit (L. J. B. D.), portés comme démissionnaires, ont été nommés sous-lieutenans dans les troupes de ligne.

Pag. 70, ligne 12,

Au lieu de fig. 2, pl. 1;

Lisez : fig. 3, pl. 1.

Pag. 76, ligne 20,

Mettez z avant le signe $+$ qui termine la ligne.

Pag. 78, à la 3e. ligne en remontant,

Au lieu de et, *lisez :* est.

Pag. 80, 1re. ligne,

Au lieu de x', *lisez :* x.

Pag. 93, ligne 17,

Au lieu de perpendiculaire $p' p'' P''$ sur AD, et on fera $p'' P'' = p' P''$,

Lisez : perpendiculaire $P' P''$ sur $A D$ et

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

IIᵉ. Vol. Nᵒ. 2. — Janvier 1810.

TABLE DES MATIÈRES.

§. Iᵉʳ.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de P. GUEFFIER, rue du Foin-Saint-Jacques, n°. 18.

r M. Ha

de Pari
rempor
éechout

sseur
, depa

mpe hy

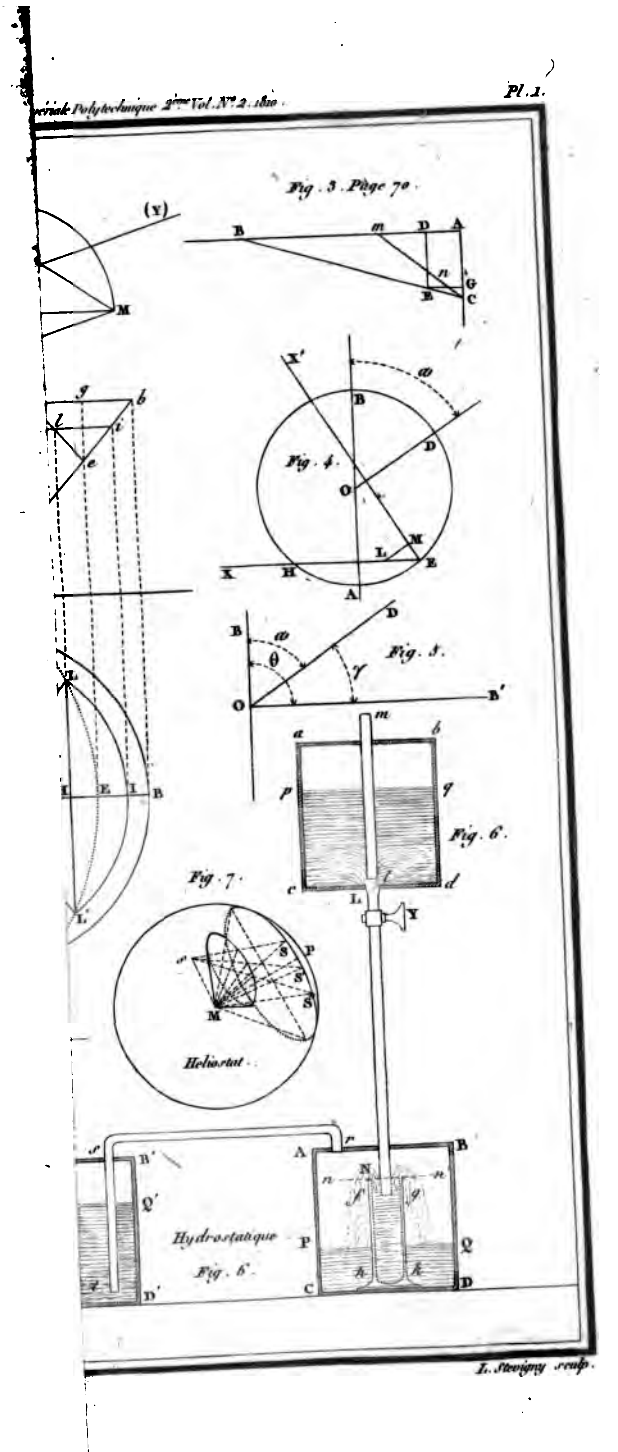
dre le

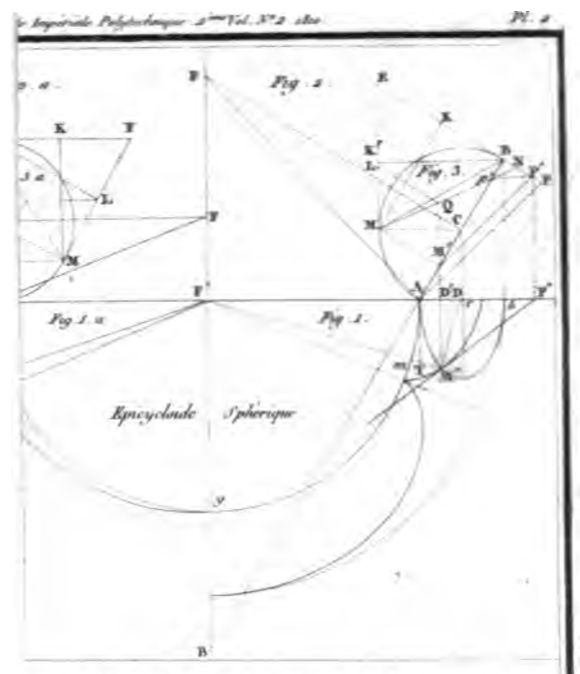
par l
émen

ytor

pc
n d

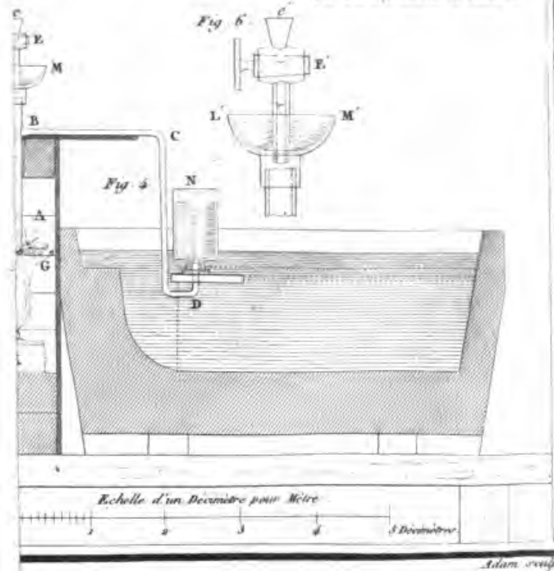
09.
n-
es





...pour l'Analyse des Substances Animales et Végétales

Par MM. Gay-Lussac et Thenard



Adam sculp.

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

N°. 3. *Janvier* 1811. (2°. vol.)

§. I.

APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE.

Des Surfaces du second degré.

J'ai proposé, l'année dernière, la question suivante :

Etant donnée l'équation générale des surfaces du second degré, trouver la relation qui doit exister entre les constantes qui entrent dans cette équation, pour qu'elle appartienne à une surface de révolution ? Trois élèves du cours de la même année, MM. Urban, Merle, Mondot, ont traité cette question de deux manières différentes; M. Bourdon, professeur au Lycée Charlemagne, l'a résolue d'une troisième manière, et il a déduit de sa solution plusieurs conséquences importantes sur la théorie des surfaces du second degré. Comme il fait usage des équations par lesquelles M. Biot a déterminé la position des trois axes rectangulaires d'une surface du second degré, je vais d'abord exposer la méthode que ce géomètre a suivie pour obtenir ces équations. Cette méthode étant la plus simple et la plus élégante de celles qu'on a employées jusqu'à présent, on la substituera à celle que j'ai suivie dans le *Traité des Surfaces du second degré*, qui sert de texte à nos leçons.

Soit l'équation générale d'une surface du second degré

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Byz + B'xz + B''xy + Cz + C'y + C''x + D = 0 ;$$

x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de cette surface, et x', y', z', les nouvelles coordonnées de ce point parallèles aux axes principaux de la surface, on a (pag. 7, 2e vol. de la Correspondance)

$$x = mx' + m'y' + m''z'$$
$$y = nx' + n'y' + n''z'$$
$$z = px' + p'y' + p''z',$$

$\left.\begin{matrix} m, n, p \\ m', n', p' \\ m'', n'', p'' \end{matrix}\right\}$ étant les cosinus des angles que l'axe principal des $\left\{\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right\}$ fait avec les trois axes primitifs des x, des y, des z.

Les neuf constantes $m, n, p, m', n', p', m'', n'', p''$, sont liées entr'elles par les relations suivantes (pag. 14 et 15 du *Traité des surfaces du second degré*) :

$$\left.\begin{matrix} m^2 + n^2 + p^2 = 1 \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 = 1 \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 = 1 \end{matrix}\right\}(1) \text{ et } \left.\begin{matrix} mm' + nn' + pp' = 0. \\ mm'' + nn'' + pp'' = 0. \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' = 0. \end{matrix}\right\}(2).$$

Substituant les valeurs de x, y, z, dans l'équation proposée, et formant les coefficiens de $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$, pour les égaler à zéro, on aura les trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{matrix} 2Ap'p'' + 2A'n'n'' + 2A''m'm'' + B(n'p'' + p'n'') \\ + B'(m'p'' + p'm'') + B''(m'n'' + n'm'') = 0 \\ 2App'' + 2A'nn'' + 2A''mm'' + B(np'' + pn'') \\ + B'(mp'' + pm'') + B''(mn'' + nm'') = 0 \\ 2App' + 2A'nn' + 2A''mm' + B(np' + pn') \\ + B'(mp' + pm'') + B''(mn' + nm') = 0 \end{matrix}\right\}(3)$$

et pour abréger $\quad N = 0, N' = 0, N'' = 0 \quad$ (3)

d'où il suit que l'équation en x', y', z', sera en général de la forme

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 \delta x' + \iota y' + \zeta z' - 1 = 0$$

qu'on peut réduire, dans un grand nombre de cas, à celle-ci :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \gamma z'^2 - 1 = 0;$$

la surface représentée par cette dernière équation est rapportée à ses trois *axes principaux* et à son centre.

Il est important de remarquer que les neuf équations (1), (2), (3), sont symétriques par rapport aux trois systèmes des constantes (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p'') ; en sorte qu'à la place des trois constantes l, m, n, on peut substituer les trois autres l', m', n', ou l'', m'', n'', pourvu qu'à la place de ces trois dernières on mette respectivement l, m, n. Il suit de cette remarque qu'en éliminant huit des neuf constantes, les équations finales en m, ou en m', ou en m'', seront identiques; par la même raison, il y aura identité entre les équations finales en n, ou n', ou n'', et en p, ou p', ou p''; les équations finales auront donc pour racines, la première les quantités m, m', m''; la seconde, les quantités n, n', n''; la troisième, les quantités p, p', p''. Le calcul suivant, rédigé par M. Bourdon, a pour objet de démontrer que les racines de chacune de ces équations finales sont toujours réelles. H. C.

Détermination des axes principaux dans les surfaces du second degré, et en particulier, dans les surfaces de révolution du second degré.

Par M. Bourdon.

Les équations (3), combinées avec les équations des deux groupes (1) et (2), devront donner les valeurs de m, n, p, m' ....

Si l'on multiplie la seconde des équations (3) par m', et la troisième par m'', qu'ensuite on les retranche l'une de l'autre, on obtient la nouvelle équation

$$\left.\begin{array}{l} 2A\ p\,(m'p''-p'm'')+B\ n\,(m'p''-p'm'') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +B'm\,(m'p''-p'm'') \\ +2A'n\,(m'n''-n'm'')+B\ p\,(m'n''-n'm'') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +B''m(m'n''-n'm'') \end{array}\right\}=0$$

ou

$$\begin{array}{l} (2Ap+Bn+B'm)\,(m'p''-p'm'') \\ +(2A'n+Bp+B''m)\,(m'n''-n'm'')=0 \quad (4). \end{array}$$

Multipliant de nouveau la deuxième par n', et la troisième par n''; puis retranchant la deuxième de la troisième, et réduisant, il vient

$$(2A\ p+B\ n+B'\ m)(p'\ n''-n'\ p'') + (2A''\ m+B'\ p+B''\ n)(m'\ n''-n'\ m'')=0 \quad (5).$$

Or les deux premières équations du groupe (2) étant multipliées d'abord par m'' et m', puis par n'' et n', et étant retranchées, donnent aussi

$$n\ (m'\ n''-n'\ m'')+p\ (m'\ p''-p'\ m'')=0$$
$$m\ (m'\ n''-n'\ m'')+p\ (p'\ n''-n'\ p'')=0;$$

d'où

$$\frac{m'\ p''-p'\ m''}{m'\ n''-n'\ m''}=-\frac{n}{p}$$
$$\frac{p'\ n''-n'\ p''}{m'\ n''-n'\ m''}=-\frac{m}{p},$$

Substituant ces valeurs dans les équations (4) et (5), il vient

$$(2Ap+Bn+B'm)\times-\frac{n}{p}+2A'\ n+B\ p+B''\ m=0$$
$$(2Ap+Bn+B'm)\times-\frac{m}{p}+2A''\ m+B'\ p+B''\ n=0$$

ou réduisant

$$2(A-A')\ n\ p+B(n^2-p^2)+B'\ m\ n-B''\ m\ p=0 \quad (6)$$
$$2(A-A'')\ mp+B\ m\ n+B'(m^2-p^2)-B''\ n\ p=0 \quad (7)$$

De ces équations on déduit facilement la suivante :

$$2(A'-A'')\ mn+B\ mp-B'\ np+B''(m^2-n^2)=0 \quad (8)$$

que l'on pourra par conséquent substituer à l'une d'elles.

Deux quelconques des équations précédentes, combinées avec l'équation $m^2+n^2+p^2=1$, donneront les valeurs de m, n, p.

Il nous reste à voir si ces quantités seront toujours susceptibles de détermination réelle, et comment on peut les obtenir.

Pour cela posons $\frac{m}{p}=t$; $\frac{n}{p}=u$;

d'où $m=pt$; $n=pu$.

L'équation $m^2+n^2+p^2=1$ donne

$$p=\frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}};\ m=\frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}};\ n=\frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}.$$

Et les équations (6), (7), (8), deviennent

$$B\,u^2+B'\,ut+2(A-A')u-B''\,t-B=0 \quad (9)$$
$$B'\,t^2+B\,ut+2(A-A'')t-B''u-B'=0 \quad (10)$$
$$B''\,t^2-B''\,u^2+2(A'-A'')ut+B\,t-B'u=0 \quad (11)$$

Si l'on prend dans la première la valeur de t, et qu'on la substitue dans la seconde, le terme affecté d'u^4 disparoîtra, et il restera, pour déterminer u, une équation du troisième degré. Or, toute équation du troisième degré ayant au moins une racine réelle, il s'ensuit que u aura au moins une valeur réelle, et qu'il en sera par conséquent de même de t, m, n, p. Observons maintenant que si l'existence simultanée des équations (4), (5), et des deux premières équations du groupe (2), entraîne celle des deux équations (6) et (7), l'existence simultanée des équations (6) et (7) et des deux premières équations du groupe (2) entraîne aussi celle des deux équations (4) et (5), et par conséquent des équations (3) $N'=0$, $N''=0$.

Il résulte de là que si l'on rapporte la surface à trois nouveaux axes rectangulaires, en prenant pour axe des x la ligne qui correspond aux valeurs réelles de m, n, p, trouvées ci-dessus, comme ces valeurs vérifient deux quelconques des trois équations (6), (7) et (8), en même-temps que les deux premières équations du groupe (2), elles vérifieront également les deux équations (4) et (5), et par conséquent $N'=0$, $N''=0$; c'est-à-dire que l'équation de la surface, rapportée à ces nouveaux axes, dont deux restent arbitraires, cette équation, dis-je, sera privée des rectangles en xz et xy, et sera de la forme

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Nyz+Pz+P'y+P''x+Q=0.$$

Or on sait que, pour une équation du second degré à deux

variables, on peut toujours trouver une position d'axes rectangulaires, telle que le rectangle des deux variables n'entre plus dans l'équation.

Ainsi on pourra, en conservant l'axe des x qui vient d'être déterminé, prendre deux nouveaux axes des y et des z, tels que le rectangle yz disparoisse dans l'équation ci-dessus.

Il est donc démontré que, par une double transformation de coordonnées, on peut toujours faire disparoître les trois rectangles de l'équation générale des surfaces du second degré, et par conséquent qu'il existe, pour toute surface du second degré, au moins un système d'axes rectangulaires par rapport auxquels son équation est privée des trois rectangles.

(2) Pour peu que l'on jette les yeux sur les équations des groupes (1), (2), (3), on reconnoît qu'elles sont symétriques par rapport à m, n, p, m'.... Donc, en éliminant m, n, p, m'', n'', p'', par une méthode analogue à la précédente, on parviendroit à trois équations en m', n', p', identiques avec les équations (6), (7), (8). La détermination de ces quantités dépendroit d'une équation en u', identique avec l'équation en u.

Même raisonnement par rapport à m'', n'', p''.

Il résulte de là que l'équation du troisième degré en u ne doit pas plutôt donner la valeur d'u, d'où dépendent les quantités m, n, p, que les deux valeurs d'où dépendent les quantités m', n', p', et m'', n'', p'', c'est-à-dire, les donne toutes trois à-la-fois. Et, comme nous venons de démontrer l'existence d'un système de trois axes différens, par rapport auxquels l'équation de la surface peut être privée des trois rectangles, c'est-à-dire pour lesquels les équations des groupes (1), (2), (3), seroient satisfaites, il s'ensuit, 1° que les trois racines de l'équation en u doivent être réelles; 2° que chacune d'elles, substituée en même-temps que la valeur correspondante de t, dans les équations

$$p=\frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}\,;\ m=\frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}}\,;\ n=\frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}\,,$$

donneroit, la première, les valeurs de m, n, p, qui correspondent à l'axe des x, par exemple; la seconde, celles de m', n', p', qui correspondent à l'axe des y; la troisième, enfin, celles de m'', n'', p'', qui correspondent à l'axe des z. Et ces trois axes ainsi déterminés formeroient le systême dont nous avons démontré l'existence, art. 1.

Il est facile de voir, d'après l'analyse précédente, que ce systême est en général unique pour une même origine, mais que, par chaque point de l'espace, on peut en imaginer un qui jouisse de la même propriété; et que tous ces systêmes sont parallèles entre eux.

Nous désignerons dorénavant les trois axes dont nous venons de parler, sous les noms d'axes principaux de la surface.

Examinons maintenant quelques cas particuliers.

La détermination des trois valeurs d'u, entraîne en général dans des calculs très-compliqués. Mais il existe des cas où ces valeurs peuvent être obtenues facilement, c'est lorsque l'une des deux équations (9) et (10), où toutes les deux sont décomposables en deux facteurs du premier dégré.

Recherchons, par exemple, la condition qui doit avoir lieu pour que l'équation (9) soit décomposable.

On tire de cette équation . . . . $u=-\dfrac{B't+2(A-A')}{2B}$

$$\pm\frac{1}{2B}\sqrt{B'^2t^2+4[B'(A-A')+BB'']t+4[(A-A')^2+B^2]}.$$

Or, pour qu'elle soit décomposable en deux facteurs rationnels, il faut que la quantité sous le radical de la valeur d'u soit un carré parfait, ce qui exige que l'on ait,

$$16[B'(A-A')+BB'']^2-16[(A-A')^2+B^2]B'^2=0,$$

ou réduisant $\qquad 2B'B''(A-A')+B(B''^2-B'^2)=0.$

Cette relation donne

$$2(A-A')=\frac{B(B'^2-B''^2)}{2B'B''}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression d'u et faisant toutes les réductions, on en tire successivement,

$$B'u-B''=0\,;\quad BB''u+B'B''t+BB'=0,$$

c'est-à-dire que l'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$(B'u-B'')(BB''u+B'B''t+BB')=0 \qquad (12)$$

Cela posé, le 1er facteur donne

$$u = \frac{B''}{B'}.$$

Substituant dans l'équation (10), il vient

$$t^2 + \frac{BB'' + 2B'(A - A'')}{B'^2} - \frac{B'^2 + B''^2}{B'^2} = 0,$$

équation dont les deux racines sont essentiellement réelles et faciles à obtenir.

Le 2e facteur donne

$$u = -\frac{B'B''t + BB'}{BB''};$$

d'où, en substituant dans l'équation (10),

$$[2BB''(A'' - A) + B'B^2 - B'B''^2]t = 0.$$

équation qui a pour valeur unique, $t = 0$;
ce qui donne

$$u = -\frac{B'}{B''};$$

et par conséquent.

$$m = 0;\ n = -\frac{B'}{\sqrt{B'^2 + B''^2}};\ p = \frac{B''}{\sqrt{B'^2 + B''^2}}.$$

4. Si dans l'équation qui vient de donner la troisième valeur de t on suppose que le coefficient soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$2BB''(A'' - A) + B'(B^2 - B''^2) = 0$$

la valeur de t reste indéterminée, ce qui annonce que le nombre des systèmes d'axes principaux est infini.

Et en effet, la condition précédente étant satisfaite, l'équa-

tion (10) est aussi décomposable en deux facteurs du premier dégré et peut-être mise sous la forme :

$$(Bt - B'')(BB''u + B'B''t + BB') = 0 \qquad (13).$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation (12), on reconnoît qu'elles ont un facteur commun qui, égalé à zéro, donnera une infinité de valeurs pour u et t.

Ainsi il existe, dans ce cas, une infinité de systêmes d'axes principaux, passant par un même point.

Mais tous ces systêmes jouissent d'une propriété remarquable: c'est d'avoir un axe commun.

Pour le prouver, remarquons que les équations (12) et (13) sont satisfaites,

1° par le systême $B'u - B'' = 0;\ Bt - B'' = 0;$
2° par l'équation $BB''u + B'B''t + BB' = 0$

Le 1er systême donne

$$u = \frac{B''}{B'};\ t = \frac{B''}{B},$$

d'où, en désignant par m, n, p, les cosinus des angles que forme cet axe particulier avec les axes primitifs,

$$p = \frac{BB'}{\sqrt{B^2B'^2 + B''^2B^2 + B'^2B''^2}};\ n = \frac{BB''}{\sqrt{}};\ m = \frac{B'B''}{\sqrt{}}.$$

Représentons maintenant par $m_{\prime}, n_{\prime}, p_{\prime}$, et $m_{\prime\prime}, n_{\prime\prime}, p_{\prime\prime}$, les cosinus relatifs aux deux axes conjugués de celui-ci. Comme ces trois axes sont rectangulaires, on a les relations

$$mm_{\prime} + nn_{\prime} + pp_{\prime} = 0;\ mm_{\prime\prime} + nn_{\prime\prime} + pp_{\prime\prime} = 0,$$

ou, mettant à la place de m, n, p, les valeurs que l'on vient de trouver,

$$B'B''m_{\prime} + BB''n_{\prime} + BB'p_{\prime} = 0;$$
$$B'B''m_{\prime\prime} + BB''n_{\prime\prime} + BB'p_{\prime\prime} = 0.$$

Et si, pour déterminer $m_{\prime}, n_{\prime}, p_{\prime}, m_{\prime\prime}, n_{\prime\prime}, p_{\prime\prime}$, on fait

$$m_{\prime} = p_{\prime}t;\ n_{\prime} = p_{\prime}u;\ m_{\prime\prime} = p_{\prime\prime}t;\ n_{\prime\prime} = p_{\prime\prime}u,$$

les deux équations se réduisent à

$$BB''u + B'B''t + BB' = 0,$$

qui est précisément celle dont on doit tirer les valeurs d'u et de t propres à donner tous les axes autres que celui qui correspond à

$$u = \frac{B''}{B'}\ ; \quad t = \frac{B''}{B}.$$

Concluons de-là, que lorsque les conditions

$$2B'B''(A - A') + B(B''^2 - B'^2) = 0 \qquad (Y)$$

$$2BB''(A'' - A) + B'(B^2 - B''^2) = 0 \qquad (Z)$$

existent simultanément, le nombre des systêmes d'axes principaux est infini ; mais tous ces systêmes ont pour axe commun, la ligne déterminée par les équations

$$u = \frac{B''}{B'}\ ; \quad t = \frac{B''}{B}.$$

Remarquons en passant, que les deux conditions précédentes, renferment la suivante ;

$$2BB'(A' - A'') + B''(B'^2 - B^2) = 0 \qquad (X)$$

et, qu'avec cette condition, l'équation (11) peut se mettre sous la forme

$$(B'u - Bt)(BB''u + B'B''t + BB') = 0.$$

(Voyez le supplément page 250).

Des Surfaces de révolution du second degré.

Caractères auxquels on reconnoît qu'une surface du 2e degré est de révolution. — Détermination de l'axe de révolution.

(5) L'analyse précédente conduit naturellement à l'examen des surfaces du second degré, pour lesquelles les relations (X),

(Y) et (Z), ont lieu. Or nous pouvons reconnoître *à priori* que ces sortes de surfaces sont du genre des surfaces de révolution.

Proposons-nous, en effet, de déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficiens d'une équation du second degré à trois variables, pour que la surface qu'elle représente soit de révolution.

Soient d'abord $x-\alpha=a(z-\gamma)$; $y-\beta=b(z-\gamma)$, les équations d'un axe de révolution passant par le point α, β, γ; $z+ax+by=c$, l'équation d'un plan perpendiculaire à cet axe; $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ l'équation d'une sphère ayant son centre au point α, β, γ. On sait que l'équation générale et caractéristique des surfaces de révolution est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=F(ax+by+z).$$

Ainsi, pour qu'une surface soit de révolution, il faut que son équation soit ou puisse être ramenée à une semblable forme.

(6) Il résulte de là que les équations des surfaces de révolution du second degré sont toutes susceptibles d'être mises sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=K(ax+by+z)^2+L, \quad (M)$$

K et L étant des quantités constantes.

Nous ne tenons point compte de la première puissance de $ax+by+z$, parce que, si elle se trouvoit dans le second membre, on pourroit la faire passer dans le premier membre, qui seroit encore de la forme $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$.

Cela posé, considérons l'équation générale du second degré

$$\begin{aligned}Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy+\\+Cz+C'y+C''x+D=0 \qquad (N)\end{aligned}$$

et voyons quelles relations il doit exister entre ses coefficiens, pour qu'elle soit susceptible d'être ramenée à la forme ci-dessus.

En développant l'équation (M), et ordonnant, on a

$$\begin{aligned}(K-1)z^2+(Kb^2-1)y^2+(Ka^2-1)x^2+\\+2Kby+2Kaxz+2Kabxy+\\+2\gamma z+2\beta y+2\alpha x+L-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=0.\end{aligned}$$

Observons maintenant que des six premiers coefficiens de l'équation (2), cinq seulement sont nécessaires. Il faut donc

diviser les équations (2) et (3) par le coefficient de z^2, avant de les comparer. Ces préparations faites, on obtiendra les relations

$$\frac{A'}{A}=\frac{Kb^2-1}{K-1};\ \frac{A''}{A}=\frac{Ka^2-1}{K-1};\ \frac{B}{A}=\frac{2Kb}{K-1};$$

$$\frac{B'}{A}=\frac{2Ka}{K-1};\ \frac{B''}{A}=\frac{2Kab}{K-1}, \text{ etc.}$$

Nous n'écrivons que ces équations, qui sont les seules susceptibles de donner des équations de condition.

On tire des trois dernières

$$1^\circ \quad \frac{4K^2ab}{2Kab(K-1)}=\frac{2K}{K-1}=\frac{BB'}{AB''};$$

$$\text{d'où} \quad K=\frac{BB'}{BB'-2AB''};\ K-1=\frac{2AB''}{BB'-2AB''};$$

$$2^\circ \quad b=\frac{B(K-1)}{2AK}=\frac{B''}{B'};$$

$$3^\circ \quad a=\frac{B''}{B};$$

substituant ces valeurs dans les deux premières, il vient

$$4^\circ \quad \frac{A'}{A}=\frac{KB''^2-B'^2}{(K-1)B'^2}=\frac{\frac{BB'B''^2}{BB'-2AB''}-B'^2}{\frac{2AB''B'^2}{BB'-2AB''}}=$$

$$=\frac{B(B''^2-B'^2)+2AB'B''}{2AB'B''},$$

d'où résulte la première équation de condition

$$2B'B''(A-A')+B(B''^2-B'^2)=0 \qquad (Y).$$

$$5^\circ \quad \frac{A''}{A}=\frac{KB''^2-B^2}{(K-1)B^2}=\frac{\frac{BB'B''^2}{BB'-2AB''}-B^2}{\frac{2AB''B^2}{BB'-2AB''}}=$$

$$=\frac{B(B''^2-B^2)+2ABB''}{2ABB''};$$

d'où résulte la seconde équation de condition

$$2BB''(A-A'')+B'(B''^2-B^2)=0 \qquad (Z).$$

Donc, pour qu'une équation du second degré appartienne à une surface de révolution, il faut que les deux équations de condition précédentes soient satisfaites.

(7) Réciproquement, toutes les fois qu'elles seront satisfaites, la surface sera de révolution, et l'on pourra même déterminer la position de l'axe.

En effet on en déduit

$$\frac{A'}{A}=\frac{B(B''^2-B'^2)+2AB'B''}{2AB'B''};$$

$$\frac{A''}{A}=\frac{B'(B''^2-B^2)+2ABB''}{2ABB''},$$

ou (art. 6) $\frac{A'}{A}=\frac{Kb^2-1}{K-1}$; $\frac{A''}{A}=\frac{Ka^2-1}{K-1}$

(En posant $\frac{BB'}{BB'-2AB''}=K$; $\frac{B''}{B'}=b$; $\frac{B''}{B}=a$)

on aura de même

$$\frac{B}{A}=\frac{2Kb}{K-1};\ \frac{B'}{A}=\frac{2Ka}{K-1};\ \frac{B''}{A}=\frac{2Kab}{K-1},$$

et l'équation (N) deviendra

$$z^2+\frac{Kb^2-1}{K-1}y^2+\frac{Ka^2-1}{K-1}x^2+$$
$$\frac{2Kb}{K-1}yz+\frac{2Ka}{K-1}xz+\frac{2Kab}{K-1}xy+$$
$$\frac{C}{A}z+\frac{C'}{A}y+\frac{C''}{A}x+\frac{D}{A}=0;$$

d'où

$$(K-1)z^2+(Kb^2-1)y^2+(Ka^2-1)x^2+$$
$$+2Kbyz+2Kaxz+2Kabxy+$$
$$+\frac{C(K-1)}{A}z+\frac{C'(K-1)}{A}y+\frac{C''(K-1)}{A}x+\frac{D(K-1)}{A}=0,$$

ou $\left[z-\frac{C(K-1)}{2A}\right]^2+\left[y-\frac{C'(K-1)}{2A}\right]^2+$

$$+\left[x-\frac{C''(K-1)}{2A}\right]^2=K(z+ax+by)^2+$$

$$+\frac{(K-1)^2\,(C^2+C'^2+C''^2)}{4A^2}+\frac{D(K-1)}{A}=0,$$

équation d'une surface de révolution dont l'axe est déterminé par les équations

$$x-\frac{C''(K-1)}{2A}=a\left(z-\frac{C(K-1)}{2A}\right);$$

$$y-\frac{C'(K-1)}{2A}=b\left(z-\frac{C(K-1)}{A}\right).$$

Il faut se rappeler que l'on a

$$K=\frac{BB'}{BB'-2AB''};\,b=\frac{B''}{B'};\,a=\frac{B''}{B}.$$

(8) Il est facile de s'assurer que cet axe de révolution est parallèle à l'axe déterminé (art. 4) par les équations

$$p=\frac{BB'}{\sqrt{B^2B'^2+B^2B''^2+B'^2B''^2}};\,m=\frac{BB'}{\sqrt{}};\,n=\frac{BB''}{\sqrt{}}.$$

En effet, soient $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$, les cosinus des angles que forme l'axe de révolution avec les axes primitifs. On a, d'après les formules connues,

$$\cos z=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{BB'}{\sqrt{B^2B'^2+B^2B''^2+B'^2B''^2}}$$

$$\cos y=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{BB''}{\sqrt{id.}}$$

$$\cos x=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{B'B''}{\sqrt{id.}}.$$

En rapprochant ce que nous venons de dire sur les surfaces de révolution du second degré, de l'analyse relative à la dispa—

rition des rectangles, on peut conclure que les surfaces de révolution du second degré ont une infinité de systêmes d'axes principaux non parallèles. Mais l'un de ces axes est commun à tous les systêmes et est parallèle à l'axe de révolution ; en outre ce sont les seules surfaces du second degré qui en aient un nombre infini.

(9) Les conditions trouvées (art. 6) souffrent quelques modifications, lorsque l'équation est privée de quelques-uns des rectangles.

Observons d'abord que, si l'équation est privée d'un seul rectangle, la surface ne peut être de révolution.

Car soit $B=0$, par exemple, la seconde condition trouvée art. 6, se réduit à $B'B''^2=0$, équation absurde, puisque les deux rectangles xz, xy, existent dans l'équation. Il en seroit de même si un seul de ces deux autres rectangles étoit nul. On peut d'ailleurs reconnoître que l'équation caractéristique (M) des surfaces de révolution du second degré ne peut jamais être réduite à ne renfermer que deux rectangles.

(10) Considérons maintenant le cas où deux des rectangles manquent dans l'équation. Les deux conditions générales sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque deux des trois quantités B, B', B'', entrent dans chacun de leurs termes. Mais observons que l'on en déduit

$$A-A'=\frac{B(B'^2-B''^2)}{2B'B''};$$

$$A-A''=\frac{B'(B^2-B''^2)}{2BB''};$$

$$A'-A''=\frac{B''(B^2-B'^2)}{2BB'};$$

d'où

$$(A-A')(A-A'')=\frac{(B'^2-B''^2)(B^2-B''^2)}{4B''^2};$$

$$(A-A')(A'-A'')=\frac{(B'^2-B''^2)(B^2-B'^2)}{4B'^2};$$

$$(A-A'')(A'-A'')=\frac{(B^2-B''^2)(B^2-B'^2)}{4B^2}.$$

Cela posé, soit d'abord $B=0$, $B'=0$.

La première équation se réduit à

$$B''^2 - 4(A-A')(A-A'') = 0,$$

et les deux autres à $0 = 0$.

Ainsi, toutes les fois que l'équation est privée des deux rectangles yz et xz, la seule condition nécessaire est

$$B''^2 - 4(A-A')(A-A'') = 0;$$

et en effet l'équation peut, dans ce cas, s'écrire ainsi

$$z^2 + y^2 + x^2 + \frac{C}{A}z + \frac{C'}{A}y + \frac{C''}{A}x + \frac{D}{A} =$$
$$= \frac{A-A'}{A}y^2 + \frac{A-A''}{A}x^2 - \frac{B''}{A}xy.$$

Or, pour que cette équation représente une surface de révolution, il faut, et il suffit que le second membre soit un carré parfait; ce qui donne la condition

$$B''^2 - 4(A-A')(A-A'') = 0.$$

Sous cette condition, l'équation devient

$$\left(z + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C'}{2A}\right)^2 + \left(x + \frac{C''}{2A}\right)^2 =$$
$$= \frac{A'-A}{A}\left(y - \frac{B''x}{2(A-A')}\right)^2 + \frac{C^2+C'^2+C''^2}{4A^2} - \frac{D}{A}.$$

Or le plan perpendiculaire à l'axe de révolution ayant pour équation $y - \frac{B''x}{2(A-A')} =$ constante, est perpendiculaire au plan des xy. L'axe est donc parallèle à ce dernier plan, et a pour équation

$$z + \frac{C}{2A} = 0;\ y + \frac{C'}{2A} = \frac{-2(A-A')}{B''}\left(x + \frac{C''}{2A}\right).$$

On obtiendroit de même

pour l'hypothèse de $B = 0$; $B'' = 0$,

la condition... $B'^2 - 4(A'-A)(A'-A'') = 0$;

et pour l'hypothèse de $B' = 0$; $B'' = 0$,

la condition.... $B^2 - 4(A''-A)(A''-A') = 0$.

(11) Considérons enfin le cas où les trois rectangles manquent dans l'équation. Il seroit facile de le déduire du cas précédent, et on trouveroit que deux des trois coefficiens A, A', A'', doivent être égaux et de même signe; mais on peut obtenir directement cette même condition. En effet, l'équation de la surface ne renfermant aucun des rectangles, le second membre de l'équation caractéristique des surfaces de révolution du second degré ne peut plus contenir qu'une des variables. Ainsi la proposée doit pouvoir être mise sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=$$
$$=Kx^2+L, \text{ ou } Ky^2+L \text{ ou } Kz^2+L;$$

ce qui exige évidemment que deux des coefficiens soient égaux et de même signe.

Et, lorsque cette condition est satisfaite, l'équation appartient à une surface de révolution, dont l'axe est parallèle à l'un des trois axes rectangulaires, celui suivant lequel se compte la variable, dont le carré est affecté d'un coefficient différent des deux autres.

Sur les surfaces du second degré, de révolution.

Par MM. Urban et Merle, *élèves*.

Soit l'équation générale du second degré :

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+Kz+1=0 \quad (1).$$

Si on a les équations de condition, (identiques avec les équations (X), (Y), (Z), pag. 196)

$$\left.\begin{aligned} 2(a-b)ef-d(e^2-f^2)&=0\\ 2(a-c)df-e(d^2-f^2)&=0\\ 2(b-c)de-f(d^2-e^2)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

l'équation (1) représente une surface de révolution dont l'axe a pour équations

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{d}{f}z+\frac{kd-gf}{2af-de}\\ y&=\frac{d}{e}z+\frac{kd-eh}{2be-df} \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Démonstration. Si la surface est de révolution, en changeant les axes des coordonnées, et prenant l'axe des z' parallèle à l'axe de révolution, on doit parvenir à une équation dans laquelle les rectangles disparoissent, et dont les coefficiens de x'^2 et y'^2 soient égaux, puisque les intersections parallèles au plan des $x'y'$ doivent être des circonférences de cercle.

Prenons pour axe des z' la ligne qui a pour équations $x = \frac{d}{f} z$ et $y = \frac{d}{e} z$; pour axe des x', l'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe des z' mené par l'origine, avec le plan des xy, et pour axe des y' une perpendiculaire au plan des $x'z'$. Nous aurons, en faisant pour abréger,

$$\sqrt{e^2+f^2} = p, \qquad \sqrt{d^2e^2+d^2f^2+e^2f^2} = q,$$

$$x = -\frac{fe^2}{pq}x' + \frac{f}{p}y' + \frac{de}{q}z',$$

$$y = -\frac{f^2e}{pq}x' - \frac{e}{p}y' + \frac{df}{q}z',$$

$$z = \frac{d(e^2+f^2)}{pq}x' + \frac{ef}{q}z',$$

Substituant, on trouve pour les coefficiens de $x'y'$, $x'z'$ et $y'z'$ des expressions qui respectivement peuvent s'écrire ainsi

$$1^\circ \left\{ -\frac{ef}{p^2q}\left\{2(a-b)ef - d(e^2-f^2)\right\}\right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{e^3}{pq^2}\left\{2(a-c)df - e(d^2-f^2)\right\} - \\ -\dfrac{f^3}{pq^2}\left\{2(b-c)de - f(d^2-e^2)\right\} \end{array}\right.$$

$$3^\circ \left\{ \frac{d}{pq}\left\{2(a-b)ef - d(e^2-f^2)\right\}\right.$$

expressions qui, toutes trois, se réduisent à zéro dans l'hypothèse où les équations (a) ont lieu, c'est-à-dire, lorsque la surface est de révolution.

Le coefficient de x'^2 est

$$\frac{ae^4f^2+be^2f^4+de^3f^3+(cd^2-def)(e^2+f^2)^2}{p^2q^2}$$

Celui de y'^2 est : $\dfrac{af^2+be^2-def}{p^2}$.

Multipliant ce dernier par q^2 haut et bas, et retranchant du premier, on aura un résultat, tel que si on y substitue pour b et c leurs valeurs tirées des deux premières équations (a), il se réduit à zero.

Lorsqu'une surface du second degré sera de révolution, les équations (a) auront lieu ; et réciproquement, toutes les fois que ces équations auront lieu, la surface sera de révolution autour d'une droite qui aura pour équations, les équations (b).

Caractères auxquels on peut reconnaître qu'une équation du second degré à trois variables représente une surface de révolution.

Par M. MONDOT, *élève*.

Une surface sera reconnue être de révolution si l'on peut trouver un système de plans parallèles, qui la coupent suivant une suite de cercles dont les centres soient sur une même droite perpendiculaire à ces plans coupans. Or on sait :

Qu'un cercle projeté sur un plan devient une ellipse qui a pour rapport de ses axes le cosinus de l'angle du plan du cercle et du plan de projection, le grand axe étant parallèle à la commune intersection des deux plans ;

Que, réciproquement, si une ellipse donnée est la projection d'une figure située dans un plan qui coupe celui de la courbe suivant une parallèle à l'axe, sous un angle dont le cosinus soit égal au rapport des axes, la figure projetée est un cercle dont le centre correspond à celui de l'ellipse ;

Que deux cercles concentriques donnent pour projections orthogonales sur un même plan deux ellipses semblables, concentriques, semblablement placées, et, réciproquement, que si sur chacun des trois plans coordonnés on a deux ellipses semblables, concentriques, semblablement placées, et que l'une d'elles soit la projection d'un cercle, l'autre ne peut être la projection

d'une figure située dans le plan du cercle, qu'autant que cette figure projetée est un cercle concentrique au premier ;

Que, dans l'équation générale d'une ellipse, les coefficiens des trois termes en x^2, y^2 et xy, déterminent complètement le rapport des axes et leur position ; d'où il suit que, si deux ellipses ont ces trois premiers termes communs dans leur équation, elles seront concentriques, semblables et semblablement placées.

Cela posé, voici la question à résoudre :

L'équation générale des surfaces du second degré étant

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+k=0,$$

il faut trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens, pour que la surface représentée soit de révolution.

Or cette équation peut, par une transformation de coordonnées qui répond à la seule transposition de l'origine, prendre la forme

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+K=0 \qquad (1)$$

les six premiers coefficiens étant les mêmes que dans l'équation précédente. L'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes donnent, dans ce cas, pour K une valeur finie ; les paraboloïdes donnent, à la vérité, une valeur infinie, mais cette dernière circonstance n'est d'aucune conséquence ; la transformation est possible algébriquement ; K est toujours une fonction des autres coefficiens, fonction qu'on peut assigner.

Je vais chercher les relations nécessaires entre les coefficiens de la dernière équation, pour qu'elle représente une surface de révolution, et cela me suffira, car il arrivera que ces relations seront entre les coefficiens communs aux deux équations, indépendantes de k, et s'appliquant par conséquent à tous les cas, même à celui des hyperboloïdes.

La méthode qui doit me conduire au résultat est fondée sur la remarque suivante :

Un cône droit dont l'axe a pour équations

$$\alpha x=\beta y,\quad \alpha x=\gamma z,$$

et dont l'angle au centre a pour cosinus φ, est représenté par l'équation

$$\varphi^2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)=(\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z)^2.$$

dont le développement ordonné est

(en représentant $\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2$ par Σ_2):

$$(\varphi^2 \Sigma_2 - \beta^2 \gamma^2) x^2 + (\varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \gamma^2) y^2 + (\varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \beta^2) z^2 -$$
$$- 2 \alpha \beta \gamma^2 x y - 2 \alpha \beta^2 \gamma x z - 2 \alpha^2 \beta \gamma y z = 0,$$

que je désignerai par $\qquad A = 0.$

Un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe, et ayant par conséquent pour équation

(2) $$\beta \gamma x + \alpha \gamma y + \alpha \beta z + D = 0,$$

coupe le cône suivant un cercle : si donc on élimine l'une quelconque des variables x, y, z, entre les deux dernières équations; l'équation finale, appartenant à la projection de la section, doit être celle d'une ellipse ayant pour rapport de ses axes le cosinus de l'angle du plan (2) et des plans de projection. Mais il est évident que si j'ajoute à A un terme constant, et que j'élimine entre l'équation (2) et l'équation

(3) $$A + T = 0,$$

le résultat de l'élimination ne différera du précédent que par la valeur du terme constant ; donc les deux ellipses, projections des sections des surfaces représentées par l'équation (3), par le plan (2), seront semblables à celles du cône par le même plan : donc les sections, faites par le plan (2) dans les surfaces (3), seront des cercles concentriques à ceux obtenus dans le cône ; c'est une suite des principes rappelés précédemment. Donc, d'après le caractère géométrique convenu, les surfaces représentées par (3) sont de révolution et ont pour axe la droite représentée par

$$\alpha x = \beta y, \quad \alpha x = \gamma z.$$

Non-seulement l'équation (3) représente toujours une surface de révolution ; mais je dis de plus qu'elle comprend toutes les surfaces de révolution du second degré. Prenons, en effet, une surface quelconque de révolution du second degré ; son axe peut toujours être représenté par $\alpha x = \beta y$, $\alpha x = \gamma z$. Coupée par les plans (2) perpendiculaires à son axe, elle doit donner pour sections des cercles qui se projettent suivant des ellipses de la nature de celles que nous avons considérées tout-à-l'heure, ayant par conséquent les trois mêmes premiers coefficiens dans leurs équations. Donc, chacune de ces équations ne peut résulter que de l'élimination entre (2) et (3) ; ou entre (2) et une équation qui soit le produit de (3) par un facteur nécessairement numérique.

Cette conclusion dérive de ce principe d'algèbre : « que si une » équation résulte de l'élimination entre deux autres P et Q, » c'est-à-dire, si elle est leur plus grand commun diviseur; » pour que la même équation finale résulte de la combinaison P » et d'une autre équation Q' différente de Q, il faut que Q' soit » un multiple de Q. » Or, dans le cas qui nous occupe, le rapport de Q à Q' ne peut être que numérique, puisque les deux équations doivent être du même degré.

L'équation (3) peut donc toujours, par des déterminations convenables de ses coefficiens, être identifiée à celle d'une surface de révolution donnée quelconque.

Il suit des remarques précédentes, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface donnée soit de révolution est que l'équation (3) puisse être identifiée à la sienne.

Ces préliminaires posés, passons à l'équation proposée.

Les conditions demandées sont évidemment celles d'où dépend l'identité des équations (1) et (3) ; elles sont au nombre de six, savoir :

$$a = \varphi^2 \Sigma_2 - \beta^2 \gamma^2$$
$$b = \varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \gamma^2$$
$$c = \varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \beta^2$$
$$d = -2 \alpha \beta \gamma^2$$
$$e = -2 \alpha \beta^2 \gamma^2$$
$$f = -2 \alpha^2 \beta \gamma.$$

Ces relations, devant être satisfaites par des valeurs communes de α, β, γ, φ, donneront deux équations de condition, que j'obtiendrai en éliminant ces quatre quantités ; or, en divisant par la valeur de d celles de e et de f, j'ai successivement les valeurs de α et de β en γ, qui sont $\beta = \frac{\gamma e}{d}$; $\alpha = \frac{\gamma f}{d}$. Ces valeurs, substituées dans les quatre premières équations, les changent en

$$a = \varphi^2 \Sigma_2 - \frac{\gamma^4 e^2}{d^2}$$

$$b = \varphi^2 \Sigma_2 - \frac{\gamma^4 f^2}{d^2}$$

$$c = \varphi^2 \Sigma_2 - \frac{\gamma^4 e^2 f^2}{d^4}$$

$$d = -\frac{2 \gamma^4 e f}{d^2}.$$

On peut éliminer φ^2, et en même temps Σ_2, en retranchant successivement la seconde et la troisième équations de la première, car les deux différences sont

$$a - b = \frac{\gamma^4}{d^2}(e^2 - f^2)$$

$$a - c = \frac{d^4 e^2}{d^2}\left(\frac{f^2}{d^2} - 1\right)$$

ajoutant la valeur de d

$$d = -\frac{2\gamma^4 ef}{d^2}.$$

J'ai trois équations qui ne renferment que γ, et, pour éliminer cette quantité, il suffit de diviser la dernière équation par la première, puis par la seconde ; car il vient alors pour les conditions cherchées

$$\left.\begin{array}{l} 2(a-b)ef + d(f^2 - e^2) = 0 \\ 2(a-c)df + e(f^2 - d^2) = 0 \\ \text{auxquelles, pour la symétrie, on peut ajouter cette troisième qui s'en déduit} \\ 2(b-c)de + f(f^2 - d^2) = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Telles sont les conditions cherchées, dont deux suffisent.

(Ces conditions ne diffèrent pas de celles qu'on a trouvées, art. 4, page 196.)

Toutes les surfaces de révolution du second degré satisfont à ces conditions ; et réciproquement, toute équation qui satisfait à ces conditions, doit représenter une surface de révolution. Il existe cependant une circonstance qui semble échapper à cette règle ; c'est celle où deux des trois coefficiens d, e, f, sont nuls, ou lorsque tous les trois le sont. En effet, l'axe de révolution est dans tous les cas

$$\alpha x = \beta y, \quad \alpha x = \gamma z,$$

et devient

$$fx = ey, \quad fx = dz,$$

par les valeurs de α, β, γ; or, tant qu'aucun des coefficiens d, e, f, est nul, ou lorsque deux ne le sont pas, on peut construire l'axe ; mais si deux sont égaux à zéro, l'axe a pour une de ses équations $x = 0$: ce qui n'indique pas toujours, comme on pourroit le croire, que l'axe est une droite quel-

conque, mais qui fait voir que, par la méthode suivie, l'algèbre ne peut résoudre la question. Dans ce cas, d'autres considérations lèvent la difficulté. En effet, s'il ne reste qu'un coefficient de rectangles des coordonnées, supposons que ce soit celui en xy, l'équation de la surface donnée sera

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + K = 0.$$

Il est clair qu'alors l'axe des coordonnées z devient un des axes de la surface; or nous savons que la condition pour qu'une surface du second degré soit de révolution, est que deux de ses axes soient égaux et réels; l'axe suivant z est égal en longueur à

$$2\sqrt{-\frac{K}{c}};$$

les deux autres sont ceux de la section par le plan xy, laquelle est

$$ax^2 + by^2 + dxy + K = 0.$$

Pour avoir les axes de cette ellipse, je transforme les coordonnées, en remplaçant x par $x \cos \alpha - y \sin \alpha$, et y par $x \sin \alpha + \cos \alpha$, et l'équation devient

$$\left.\begin{array}{l} aC^2 \\ +bS^2 \\ +dCS \\ \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{l} +aS^2 \\ +bC^2 \\ +dCS \\ \end{array}\right| y^2 \left.\begin{array}{l} -2aCS \\ +2bCS \\ -dS^2 \\ +dC^2 \end{array}\right| xy + K = 0$$

C et S désignant $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

Egalant à zéro le coefficient de xy, l'équation qui donne C et S sera

$$\left.\begin{array}{ll} & 2CS(b-a) + d(C^2 - S^2) \\ \text{à laquelle il faut joindre} & C^2 + S^2 = 1 \end{array}\right\} \quad (5)$$

et les axes deviendront

$$2\sqrt{-\frac{K}{aC^2 + bS^2 + dCS}} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{-\frac{K}{aS^2 + bC^2 - dCS}}$$

La condition est l'égalité de deux axes ; il suffit donc qu'on ait l'une des trois équations

$$c = aC^2 + bS^2 + dCS$$

$$c = aS^2 + bC^2 - dCS$$

$$aC^2 + bS^2 + dCS = aS^2 + bC^2 - cCS.$$

C et S sont donnés par les deux équations (5) et ont pour valeurs

$$C = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4(b-a)^2}}$$

$$S = \frac{2(b-a)}{\sqrt{d^2 + 4(b-a)^2}}.$$

Les trois conditions deviennent par les substitutions, après avoir simplifié,

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4(c-b)(a-b)^2 + d^2(c+a-2b) = 0 \\ 4(c-a)(a-b)^2 + d^2(c+b-2a) = 0 \\ 4(b-a)^2 = 3d^2. \end{array} \right.$$

La question proposée est complètement résolue ; car, s'il n'y a pas deux des coefficiens de xy, xz, yz, qui soient nuls, on pourra faire usage des équations (4), et si deux de ces coefficiens sont nuls, on se servira des équations (6). Dans le cas où les trois coefficiens sont nuls, $d = 0$, et les trois équations précédentes se réduisent à

$$(c-b)(a-b) = 0 ; \; (c-a)(a-b) = 0 ; \; (a-b) = 0,$$

ou à ces trois-ci $a = b$; $a = c$; $b = c$, dont une suffit.

Note sur le développement des puissances des sinus et des cosinus, en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

Par M. Poisson.

On propose de développer $\cos^m . x$, en série de cosinus des multiples de l'arc x.

Pour cela, soit

$$\cos . x + \sin . x . \sqrt{-1} = u, \cos . x - \sin . x . \sqrt{-1} = v;$$

nous aurons

$$2 . \cos . x = u + v;$$

par conséquent

$$2^m . \cos^m . x = (u+v)^m,$$

ou bien, en développant par la formule du binome,

$$2^m . \cos^m x = u^m + m . u^{m-2} . uv + \frac{m . m-1}{2} . u^{m-4} u^2 v^2 + \&c.$$

Mais on a

$$uv = \cos^2 . x + \sin^2 x = 1;$$

et d'après la formule de Moivre, on a aussi, quel que soit l'exposant m,

$$u^m = (\cos . x + \sin . x . \sqrt{-1})^m = \cos . mx + \sin . mx \sqrt{-1}$$

Substituant ces valeurs dans celle de $2^m . \cos^m . x$, il vient

$$\left.\begin{aligned} 2^m . \cos^m . x = {} & \cos . mx + m . \cos . (m-2) x \\ & + \frac{m . m-1}{2} . \cos . (m-4) x + \&c. \\ & + \sqrt{-1}\left(\begin{aligned} & \sin . mx + m . \sin . (m-2) x \\ & + \frac{m . m-1}{2} . \sin . (m-4) x + \&c. \end{aligned}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ainsi la valeur complette de $2^m . \cos^m . x$ se compose de deux séries dont la loi est évidente.

Au lieu de développer $(u+v)^m$ suivant les puissances de v, on peut écrire

$$2^m . \cos^m . x = (v+u)^m,$$

et développer suivant les puissances de u. On a de cette manière

$$2^m . \cos^m . x = v^m + m v^{m-2} . vu + \frac{m . m-1}{2} . v^{m-4} . v^2 u^2 + \&c.$$

donc, à cause de $uv = 1$ et de

$$v^m = (\cos . x - \sin . x . \sqrt{-1})^m = \cos . mx - \sin . mx . \sqrt{-1},$$

qui a lieu pour tous les exposans, on aura

$$\left.\begin{aligned} 2^m . \cos^m . x = \cos . mx &+ m . \cos . (m-2) x \\ &+ \frac{m . m-1}{2} . \cos . (m-4) x + \&c. \\ &- \sqrt{-1} \left(\begin{aligned} &\sin . mx + . \sin . (m-2) x \\ &+ \frac{m . m-1}{2} . \sin . (m-4) x + \&c. \end{aligned} \right) \end{aligned}\right\} (2)$$

Cette seconde expression de $2^m . \cos^m . x$ ne diffère de la première que par le signe de $\sqrt{-1}$.

Maintenant j'observe que si m est un nombre entier, positif ou négatif, la quantité $2^m . \cos^m . x$ n'est susceptible que d'une seule valeur pour chaque valeur de x; ces deux expressions (1) et (2) doivent donc être équivalentes, et si on les ajoute, on aura le double de la valeur de $2^m . \cos^m . x$; ajoutant donc et divisant par 2, on aura simplement

$$\left.\begin{aligned} 2^m . \cos^m . x = \cos . mx &+ m . \cos . (m-2) x \\ &+ \frac{m . m-1}{2} . \cos . (m-4) x \\ &+ \&c. \end{aligned}\right\} (3)$$

Ce résultat est la formule connue, que l'on donne ordinairement sans aucune restriction, et qui, cependant, ne convient en général qu'au cas de l'exposant entier. En effet, quand m est fractionnaire, la quantité $2^m . \cos^m . x$ a plusieurs valeurs pour chaque valeur de x. Or, les expressions (1) et (2) correspondent à deux de ces valeurs qui diffèrent entr'elles par le signe de $\sqrt{-1}$, de sorte qu'en les ajoutant et divisant par 2, on retrouve la partie réelle, commune à ces deux valeurs, et non pas une valeur de $2^m . \cos^m . x$. Il en faut excepter les cas particuliers où la valeur de x rend nul le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans les formules (1), (2); dans ces cas, les trois formules coïncident, et la formule (3) donne la valeur de $2^m . \cos^m . x$; mais, dans tout autre cas, cette formule induira en erreur sur la vraie valeur de cette quantité.

Supposons, par exemple, $m = \frac{1}{3}$ et $x = 200°$; on aura

$$\cos . 200° = -1, \quad \text{et} \quad 2^m . \cos^m . x = \sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{-1},$$

quantité dont les trois valeurs sont

$$-\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{2}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right), \quad \sqrt[3]{2}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Or, à cause de

$$\cos . (m-2i) x = \cos . \left(\frac{200°}{3} - 2i . 200°\right) = \cos . \frac{200°}{3},$$

i désignant un nombre entier quelconque, la formule (3) donnera

$$\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{-1} = \cos . \frac{200°}{3} \left(\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} . \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right) \\ + \frac{1}{2.3} . \frac{1}{3} . \left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right) + \&c. \end{array}\right)$$

la série comprise entre les parenthèses est le développement de $(1+1)^{\frac{1}{3}}$; d'ailleurs $\cos . \frac{200°}{3} = \sin . \frac{100°}{3} = \frac{1}{2}$; on auroit donc pour résultat $\frac{1}{2}(1+1)^{\frac{1}{3}}$ ou $\frac{1}{2} . \sqrt[3]{2}$, qui

n'est point une de nos trois valeurs, mais bien la demi-somme de deux d'entr'elles. La formule (3) peut donner la première de ces trois valeurs; mais il faut pour cela y faire $x = 3 \cdot 200^\circ$. On a toujours $\cos . x = -1$, et la formule (3) devient

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-1} = \cos . 200^\circ \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} (\tfrac{1}{3} - 1) + \&c.\right) = -\sqrt[3]{2}.$$

Chacune des formules (1) et (2) donnera les trois valeurs de $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{-1}$, en y faisant successivement

$$x = 200^\circ, \quad x = 3 \cdot 200^\circ, \quad x = 5 \cdot 200^\circ.$$

En général, si m est une fraction de la forme $\frac{p}{n}$, les équations (1) et (2) donneront les n valeurs de la quantité

$$2^m \cdot \cos^m . x \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{2^p \cdot \cos^p . x},$$

en y mettant successivement, à la place des x, les n quantités

$$x,\ x + 400^\circ,\ x + 2 \cdot 400^\circ,\ x + 3 \cdot 400^\circ, \ldots x + (n-1) \cdot 400^\circ,$$

pour lesquelles le premier membre reste toujours

$$\sqrt[n]{2^p \cdot \cos^p . x}.$$

La véritable expression de $\cos^m . x$ étant connue, on en déduit celle de $\sin^m . x$, en y substituant $100^\circ - x$, à la place de x, car on a

$$\cos^m . (100^\circ - x) = \sin^m . x.$$

Or, i étant un nombre entier, on a

$$\cos . (m-2i) . (100^\circ - x) = \cos (m-2i) . 100^\circ \ . \cos (m-2i) x$$
$$+ \sin (m-2i) . 100^\circ \ . \sin (m-2i) x,$$

$$\sin . (m-2i) . (100^\circ - x) = \sin (m-2i) . 100^\circ \ . \cos (m-2i) x$$
$$- \cos (m-2i) . 100^\circ \ . \sin (m-2i) x,$$

$$\cos . (m-2i) . 100^\circ = \pm \cos . m . 100^\circ,$$

$$\sin (m-2i) . 100^\circ = \pm \sin . m . 100^\circ;$$

d'une figure située dans le plan du cercle, qu'autant que cette figure projetée est un cercle concentrique au premier;

Que, dans l'équation générale d'une ellipse, les coefficiens des trois termes en x^2, y^2 et xy, déterminent complètement le rapport des axes et leur position; d'où il suit que, si deux ellipses ont ces trois premiers termes communs dans leur équation, elles seront concentriques, semblables et semblablement placées.

Cela posé, voici la question à résoudre :

L'équation générale des surfaces du second degré étant

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + k = 0,$$

il faut trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens, pour que la surface représentée soit de révolution.

Or cette équation peut, par une transformation de coordonnées qui répond à la seule transposition de l'origine, prendre la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + K = 0 \qquad (1)$$

les six premiers coefficiens étant les mêmes que dans l'équation précédente. L'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes donnent, dans ce cas, pour K une valeur finie; les paraboloïdes donnent, à la vérité, une valeur infinie, mais cette dernière circonstance n'est d'aucune conséquence; la transformation est possible algébriquement; K est toujours une fonction des autres coefficiens, fonction qu'on peut assigner.

Je vais chercher les relations nécessaires entre les coefficiens de la dernière équation, pour qu'elle représente une surface de révolution, et cela me suffira, car il arrivera que ces relations seront entre les coefficiens communs aux deux équations, indépendantes de k, et s'appliquant par conséquent à tous les cas, même à celui des hyperboloïdes.

La méthode qui doit me conduire au résultat est fondée sur la remarque suivante :

Un cône droit dont l'axe a pour équations

$$\alpha x = \beta y, \quad \alpha x = \gamma z,$$

et dont l'angle au centre a pour cosinus φ, est représenté par l'équation

$$\varphi^2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (\beta\gamma x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z)^2.$$

dont le développement ordonné est

(en représentant $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2$ par Σ_2):

$$(\varphi^2\Sigma_2-\beta^2\gamma^2)x^2+(\varphi^2\Sigma_2-\alpha^2\gamma^2)y^2+(\varphi^2\Sigma_2-\alpha^2\beta^2)z^2-$$
$$-2\alpha\beta\gamma^2xy-2\alpha\beta^2\gamma xz-2\alpha^2\beta\gamma yz=0,$$

que je désignerai par $\quad A=0.$

Un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe, et ayant par conséquent pour équation

$$(2)\qquad \beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z+D=0,$$

coupe le cône suivant un cercle : si donc on élimine l'une quelconque des variables x, y, z, entre les deux dernières équations; l'équation finale, appartenant à la projection de la section, doit être celle d'une ellipse ayant pour rapport de ses axes le cosinus de l'angle du plan (2) et des plans de projection. Mais il est évident que si j'ajoute à A un terme constant, et que j'élimine entre l'équation (2) et l'équation

$$(3)\qquad A+T=0,$$

le résultat de l'élimination ne différera du précédent que par la valeur du terme constant; donc les deux ellipses, projections des sections des surfaces représentées par l'équation (3), par le plan (2), seront semblables à celles du cône par le même plan : donc les sections, faites par le plan (2) dans les surfaces (3), seront des cercles concentriques à ceux obtenus dans le cône; c'est une suite des principes rappelés précédemment. Donc, d'après le caractère géométrique convenu, les surfaces représentées par (3) sont de révolution et ont pour axe la droite représentée par

$$\alpha x=\beta y,\quad \alpha x=\gamma z.$$

Non-seulement l'équation (3) représente toujours une surface de révolution; mais je dis de plus qu'elle comprend toutes les surfaces de révolution du second degré. Prenons, en effet, une surface quelconque de révolution du second degré; son axe peut toujours être représenté par $\alpha x=\beta y$, $\alpha x=\gamma z$. Coupée par les plans (2) perpendiculaires à son axe, elle doit donner pour sections des cercles qui se projettent suivant des ellipses de la nature de celles que nous avons considérées tout-à-l'heure, ayant par conséquent les trois mêmes premiers coefficiens dans leurs équations. Donc, chacune de ces équations ne peut résulter que de l'élimination entre (2) et (3); ou entre (2) et une équation qui soit le produit de (3) par un facteur nécessairement numérique.

d'une figure située dans le plan du cercle, qu'autant que cette figure projetée est un cercle concentrique au premier ;

Que, dans l'équation générale d'une ellipse, les coefficiens des trois termes en x^2, y^2 et xy, déterminent complètement le rapport des axes et leur position ; d'où il suit que, si deux ellipses ont ces trois premiers termes communs dans leur équation, elles seront concentriques, semblables et semblablement placées.

Cela posé, voici la question à résoudre :

L'équation générale des surfaces du second degré étant

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+k=0,$$

il faut trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens, pour que la surface représentée soit de révolution.

Or cette équation peut, par une transformation de coordonnées qui répond à la seule transposition de l'origine, prendre la forme

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+K=0 \qquad (1)$$

les six premiers coefficiens étant les mêmes que dans l'équation précédente. L'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes donnent, dans ce cas, pour K une valeur finie ; les paraboloïdes donnent, à la vérité, une valeur infinie, mais cette dernière circonstance n'est d'aucune conséquence ; la transformation est possible algébriquement ; K est toujours une fonction des autres coefficiens, fonction qu'on peut assigner.

Je vais chercher les relations nécessaires entre les coefficiens de la dernière équation, pour qu'elle représente une surface de révolution, et cela me suffira, car il arrivera que ces relations seront entre les coefficiens communs aux deux équations, indépendantes de k, et s'appliquant par conséquent à tous les cas, même à celui des hyperboloïdes.

La méthode qui doit me conduire au résultat est fondée sur la remarque suivante :

Un cône droit dont l'axe a pour équations

$$\alpha x=\beta y, \quad \alpha x=\gamma z,$$

et dont l'angle au centre a pour cosinus φ, est représenté par l'équation

$$\varphi^2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)=(\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta z)^2.$$

dont le développement ordonné est

(en représentant $\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2$ par Σ_2):

$$(\varphi^2 \Sigma_2 - \beta^2 \gamma^2)\, x^2 + (\varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \gamma^2)\, y^2 + (\varphi^2 \Sigma_2 - \alpha^2 \beta^2)\, z^2 -$$
$$- 2\alpha\beta\gamma^2 xy - 2\alpha\beta^2 \gamma xz - 2\alpha^2 \beta\gamma yz = 0,$$

que je désignerai par $\quad A = 0.$

Un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe, et ayant par conséquent pour équation

(2) $$\beta\gamma x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z + D = 0,$$

coupe le cône suivant un cercle : si donc on élimine l'une quelconque des variables x, y, z, entre les deux dernières équations; l'équation finale, appartenant à la projection de la section, doit être celle d'une ellipse ayant pour rapport de ses axes le cosinus de l'angle du plan (2) et des plans de projection. Mais il est évident que si j'ajoute à A un terme constant, et que j'élimine entre l'équation (2) et l'équation

(3) $$A + T = 0,$$

le résultat de l'élimination ne différera du précédent que par la valeur du terme constant; donc les deux ellipses, projections des sections des surfaces représentées par l'équation (3), par le plan (2), seront semblables à celles du cône par le même plan : donc les sections, faites par le plan (2) dans les surfaces (3), seront des cercles concentriques à ceux obtenus dans le cône; c'est une suite des principes rappelés précédemment. Donc, d'après le caractère géométrique convenu, les surfaces représentées par (3) sont de révolution et ont pour axe la droite représentée par

$$\alpha x = \beta y, \quad \alpha x = \gamma z.$$

Non-seulement l'équation (3) représente toujours une surface de révolution; mais je dis de plus qu'elle comprend toutes les surfaces de révolution du second degré. Prenons, en effet, une surface quelconque de révolution du second degré; son axe peut toujours être représenté par $\alpha x = \beta y$, $\alpha x = \gamma z$. Coupée par les plans (2) perpendiculaires à son axe, elle doit donner pour sections des cercles qui se projettent suivant des ellipses de la nature de celles que nous avons considérées tout-à-l'heure, ayant par conséquent les trois mêmes premiers coefficiens dans leurs équations. Donc, chacune de ces équations ne peut résulter que de l'élimination entre (2) et (3); ou entre (2) et une équation qui soit le produit de (3) par un facteur nécessairement numérique.

Des Nombres figurés ; par M. Barruel, *bibliothécaire de l'École Polytechnique.*

Nous ne donnons ici la théorie de ces nombres, que pour faire voir que l'on peut trouver la loi de leur sommation d'une manière beaucoup plus abrégée qu'on ne le fait ordinairement ; ensuite pour en montrer l'application à la loi des coefficiens du binôme, dont la démonstration devient par là plus simple, plus directe, et pour laquelle on n'a pas besoin de recourir aux *combinaisons*, qui n'y tiennent que d'une manière très-éloignée, et que d'ailleurs les commençans ont beaucoup de peine à bien concevoir. Nous verrons tout-à-l'heure que c'est dans l'observation seule de ce qui se passe en multipliant un binôme un certain nombre de fois par lui-même, que l'on doit chercher la démonstration de cette dernière loi.

Avant de passer aux nombres figurés, posons d'abord les remarques suivantes :

1[ère] *remarque.* Soit la suite 1×2, 2×3, 3×4, 4×5 : pour en prendre la somme, on pourroit employer la méthode des coefficiens indéterminés ; mais cela ne fourniroit qu'un résultat isolé, dont on ne pourroit tirer aucune conséquence pour prendre la somme d'autres suites semblables, qu'il faudroit chercher de la même manière. Pour sommer donc cette suite, nous allons employer une autre méthode qui lie ces diverses sommes entre elles, et qui en fasse découvrir la loi. En effet, observons que l'on a

$$1.2 = \ldots\ldots\ldots = 1.2.\tfrac{3}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2\\+2.3\end{array}\right\} = 1.2.\tfrac{3}{3} + 2.3.\tfrac{3}{3} = 2.3.\tfrac{4}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2\\+2.3\\+3.4\end{array}\right\} = 2.8.\tfrac{4}{3} + 3.4.\tfrac{3}{3} = 3.4.\tfrac{5}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2\\+2.3\\+3.4\\+4.5\end{array}\right\} = 3.4.\tfrac{5}{3} + 4.5.\tfrac{3}{3} = 4.5.\tfrac{6}{3}$$

Ainsi de suite. Donc, si le nombre des termes est n', le dernier terme sera $n'(n'+1)$, et par conséquent la somme S' donnera

$$S' = n'(n'+1)\frac{(n'+2)}{3} \qquad (M).$$

2° *remarque*. Soit la suite $1\times2\times3$, $2\times3\times4$, $3\times4\times5$, $4\times5\times6$: pour en prendre la somme, observons encore que l'on a

$$1.2.3 = \dots\dots\dots = 1.2.3.\tfrac{4}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1.2.3 \\ +2.3.4 \end{array}\right\} = 1.2.3.\tfrac{4}{4} + 2.3.4.\tfrac{4}{4} = 2.3.4.\tfrac{5}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1.2.3 \\ +2.3.4 \\ +3.4.5 \end{array}\right\} = 2.3.4.\tfrac{5}{4} + 3.4.5.\tfrac{4}{4} = 3.4.5.\tfrac{6}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1.2.3 \\ +2.3.4 \\ +3.4.5 \\ +4.5.6 \end{array}\right\} = 3.4.5.\tfrac{6}{4} + 4.5.6.\tfrac{4}{4} = 4.5.6.\tfrac{7}{4}$$

Ainsi de suite. Donc, si le nombre des termes est n'', le dernier terme sera $n''\ (n''+1)\ (n''+2)$, et par conséquent la somme S'' donnera

$$S'' = n''\,(n''+1)\,(n''+2)\ \frac{(n''+3)}{4}. \qquad (N)$$

On trouvera de même que la somme S''' de la suite $1\times2\times3\times4$, $2\times3\times4\times5$, $3\times4\times5\times6$, etc., dont le nombre des termes est n''', donne

$$S''' = n'''\,(n'''+1)\,(n'''+2)\,(n'''+3)\ \frac{(n'''+4)}{5}. \quad (O)$$

Ainsi de suite pour les valeurs de S^{iv}, S^{v}, etc.

Cela posé, on sait que l'on appelle *nombres figurés*, des nombres qui se forment de la manière suivante. Soit la suite des unités :

1, 1, 1, 1, 1,

que l'on nomme *nombres constans*. Si l'on prend successivement la somme de ces unités depuis la première jusqu'à chacune des autres, on aura la suite :

1, 2, 3, 4, 5, ... (*A*)

que l'on nomme *nombres naturels*. Si l'on prend de la même

manière la somme de ces derniers nombres, on formera la suite :

$$1, 3, 6, 10, 15, \qquad (B)$$

que l'on nomme *nombres triangulaires*. Si l'on prend encore de la même manière la somme de ces derniers nombres, on formera la nouvelle suite :

$$1, 4, 10, 20, 35, \qquad (C)$$

que l'on nomme *nombres pyramidaux*. Si l'on prend encore de même la somme de ces derniers nombres, on aura une autre suite :

$$1, 5, 15, 35, 70, \qquad (D)$$

avec laquelle on formera de même de nouveaux nombres, qui eux-mêmes donneront naissance à une nouvelle suite, etc. Voyons à présent comment on peut sommer toutes ces suites.

1°. On voit que, la suite (A) des nombres naturels formant une progression arithmétique, si l'on nomme n le nombre des termes, et S la somme, on a

$$S = n \cdot \frac{n+1}{2} \qquad (P).$$

2°. Comme les termes de la suite (B) des nombres triangulaires se forment chacun en prenant la somme de progressions arithmétiques, dont le nombre des termes augmente successivement d'une unité, il est évident qu'en nommant S' la somme des termes, et en substituant successivement 1, 2, 3, 4, 5, à la place de n dans l'équation (P), il vient

$$S' = \frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} + \frac{5(5+1)}{2}$$

$$S' = \tfrac{1}{2}(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6).$$

Donc, d'après l'équation (M), on a

$$S' = \tfrac{1}{2}(5 \cdot 6 \cdot \tfrac{7}{3})$$

Donc, en appelant n' le nombre des termes, il vient

$$S' = n' \cdot \frac{n'+1}{2} \cdot \frac{n'+2}{3} \qquad (Q).$$

3°. En nommant S'' la somme des termes de la suite (C)

des nombres pyramidaux, il n'est pas moins clair que si l'on substitue successivement 1, 2, 3, 4, 5, à la place de n' dans l'équation (Q), on aura

$$S'' = \frac{1(1+1)(1+2)}{2.3} + \frac{2(2+1)(2+2)}{2.3} + \frac{3(3+1)(3+2)}{2.3} + \frac{4(4+1)(4+2)}{2.3} + \frac{5(5+1)(5+2)}{2.3},$$

$$S'' = \frac{1}{2.3}(1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7).$$

Donc, d'après l'équation (N), on a

$$S'' = \frac{1}{2.3}(5.6.7.\tfrac{8}{4}).$$

Donc, en nommant n'' le nombre des termes, il vient

$$S'' = n''.\frac{n''+1}{2}.\frac{n''+2}{3}.\frac{n''+3}{4} \qquad (R).$$

4° En nommant S''' la somme des termes de la suite (D) qui vient après les nombres pyramidaux, il est encore évident que si l'on substitue successivement 1, 2, 3, 4, 5, à la place de n'' dans l'équation (R), on aura

$$S''' = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{2.3.4} + \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{2.3.4} + \frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{2.3.4} + \frac{4(4+1)(4+2)(4+3)}{2.3.4} + \frac{5(5+1)(5+2)(5+3)}{2.3.4},$$

$$S''' = \frac{1}{2.3.4}(1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + 4.5.6.7 + 5.6.7.8).$$

Donc, d'après l'équation (O), on a

$$S''' = \frac{1}{2.3.4}(5.6.7.8.\tfrac{9}{5}).$$

Donc, en nommant n''' le nombre des termes, il vient

$$S''' = n'''.\frac{n'''+1}{2}.\frac{n'''+2}{3}.\frac{n'''+3}{4}.\frac{n'''+4}{5};$$

ainsi de suite. D'où l'on voit que la loi que suivent les différentes valeurs de S, S', S'', S''', etc., se manifeste assez clairement.

Application à la loi des coefficiens du binôme.

D'abord, on sait qu'après avoir multiplié le binôme $x+a$ un certain nombre de fois par lui-même, pour en obtenir successivement les 2e, 3e, 4e, etc. puissances, et qu'après avoir réuni en un seul terme tous ceux qui contiennent la même puissance de x, on sait, dis-je, et d'ailleurs il est facile de remarquer :

1°. Que le premier terme d'une puissance donnée, quelle qu'elle soit, doit toujours être le premier terme x du binôme, élevé à cette même puissance;

2°. Que les exposans de x vont en diminuant d'une unité dans les termes suivans, et que ceux de a vont au contraire en augmentant d'une unité, à partir du second terme où il commence à entrer;

3°. Que le dernier terme de la puissance donnée doit toujours être le dernier terme a du binôme, élevé à cette même puissance; de sorte qu'en appelant A, B, C, D, E..... les coefficiens des autres termes, on a

$$(x+a)^m = x^m + Aax^{m-1} + Ba^2x^{m-2} + Ca^3x^{m-3} + Da^4x^{m-4} \ldots\ldots + a^m,$$

suite dans laquelle il ne s'agit que de déterminer les coefficiens A, B, C, D......, et de trouver la loi qu'ils suivent.

Pour cela, observons d'abord en général que, pour élever le binôme $x+a$ à la puissance $n+1$, il faut multiplier $(x+a)^n$ par $x+a$; ce qui donne, en supposant les coefficiens P, Q, R...., déterminés,

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)(x+a)^n = (x+a)(x^n + Pax^{n-1} + Qa^2x^{n-2} + Ra^3x^{n-3} \ldots\ldots + a^n)$$

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + (P+1)ax^n + (Q+P)a^2x^{n-1} + (R+Q)a^3x^{n-2} \ldots\ldots + a^{n+1}.$$

On voit par là que telle est la loi que suivent les coefficiens de $(x+a)^{n+1}$; que, pour avoir chacun d'eux, il faut ajouter le coefficient du terme correspondant dans la puissance, dont le degré a une unité de moins, avec le coefficient du terme pré-

cédent. Donc, si l'on a les puissances successives du binôme $x+a$, telles que

$$
\begin{array}{l}
(x+a)^m = x^m + A\,ax^{m-1} + B\,a^2x^{m-2} + C\,a^3x^{m-3} + D\,a^4x^{m-4} + E\,a^5x^{m-5} \ldots\ldots + a^m \\
(x+a)^{m-1} = x^{m-1} + A'\,ax^{m-2} + B'\,a^2x^{m-3} + C'\,a^3x^{m-4} + D'\,a^4x^{m-5} + E'\,a^5x^{m-6} \ldots\ldots + a^{m-1} \\
(x+a)^{m-2} = x^{m-2} + A''\,ax^{m-3} + B''\,a^2x^{m-4} + C''\,a^3x^{m-5} + D''\,a^4x^{m-6} + E''\,a^5x^{m-7} \ldots\ldots + a^{m-2} \\
(x+a)^{m-3} = x^{m-3} + A'''ax^{m-4} + B'''a^2x^{m-5} + C'''a^3x^{m-6} + D'''a^4x^{m-7} + E'''a^5x^{m-8} \ldots + a^{m-3} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

on aura, d'après la loi précédente,

$$
\begin{array}{llll}
A = A' + 1 & B = B' + A' & C = C' + B' & D = D' + C' \ldots\ldots \\
A' = A'' + 1 & B' = B'' + A'' & C' = C'' + B'' & D' = D'' + C'' \ldots\ldots \\
A'' = A''' + 1 & B'' = B''' + A''' & C'' = C''' + B''' & D'' = D''' + C''' \ldots\ldots \\
A''' = A^{\text{IV}} + 1 & B''' = B^{\text{IV}} + A^{\text{IV}} & C''' = C^{\text{IV}} + B^{\text{IV}} & D''' = D^{\text{IV}} + C^{\text{IV}} \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Donc, en faisant les substitutions indiquées, et en observant que les dernières lettres accentuées sont chacune égales à l'unité, on a

$$
\begin{array}{l}
A = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots\ldots + 1 = m \\
A' = \ldots 1 + 1 + 1 \ldots\ldots\ldots + 1 = m - 1 \\
A'' = \ldots\ldots\ldots 1 + 1 \ldots\ldots\ldots + 1 = m - 2 \\
A''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots + 1 = m - 3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
B = A' + A'' + A''' + A^{\text{IV}} \ldots + 1 = (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots + 1 \\
B' = \ldots\ldots A'' + A''' + A^{\text{IV}} \ldots + 1 = \ldots\ldots\ldots (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots + 1 \\
B'' = \ldots\ldots\ldots\ldots A''' + A^{\text{IV}} \ldots + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m-3) + (m-4) \ldots + 1 \\
B''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^{\text{IV}} \ldots + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m-4) \ldots + 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
C = B' + B'' + B''' + B^{\text{IV}} \ldots + 1 & D = C' + C'' + C''' + C^{\text{IV}} \ldots + 1 \\
C' = \ldots B'' + B''' + B^{\text{IV}} \ldots + 1 & D' = \ldots C'' + C''' + C^{\text{IV}} \ldots + 1 \\
C'' = \ldots\ldots\ldots B''' + B^{\text{IV}} \ldots + 1 & D'' = \ldots\ldots\ldots C''' + C^{\text{IV}} \ldots + 1 \\
C''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B^{\text{IV}} \ldots + 1 & D''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C^{\text{IV}} \ldots + 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

De là suit cette autre loi, que chacun des coefficiens A, B, C, D, E... est égal à la somme des coefficiens qui le précèdent immédiatement dans toutes les puissances inférieures à m. Or, cette loi n'est autre chose que celle des *nombres figurés* (*).

En effet il est aisé de voir, d'après ce qui précède, que A est formé de la suite des nombres *constans* ; que A, A', A'', A'''..... sont la suite des nombres *naturels* ; que B, B', B'', B'''.... sont la suite des nombres *triangulaires* ; que C, C', C'', C'''...... sont la suite des nombres *pyramidaux* ; que D, D', D'', D'''..... sont la suite des nombres de l'ordre suivant, etc.

Donc, 1°. le coefficient A est égal à l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le binôme, c'est-à-dire que l'on a

$$A = m.$$

2°. Puisque $B = A' + A'' + A''' + A^{IV}$............ $+ 1 =$ $= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4)$.......... $+ 1$, ce

---

(*) *Tableau des Nombres figurés.*

		b		d		f		h		k		m	
	1	1		1		1		1		1		1	
a	1	2		3		4		5		6		7	nombres naturels.
c	1	3		6		10		15		21		28	nombres triangulaires.
e	1	4		10		20		35		56		84	nombres pyramidaux.
g	1	5		15		35		70		126		210	
i	1	6		21		56		126		252		462	
l	1	7		28		84		210		462		984.	

Un simple coup-d'œil jeté sur ce tableau, fait reconnoître que les diagonales *ab, cd, ef, gh, ik, lm*............. sont les coefficiens des puissances 1ère, 2e, 3e........ du binôme.

Note de M. Monge, *examinateur de la marine.*

coefficient B est la somme des nombres naturels dont le nombre des termes est $m - 1$. Donc cette somme donne

$$B = m \cdot \frac{m-1}{2}.$$

3°. Puisque l'on a $C = B' + B'' + B''' + B^{\text{iv}} \ldots\ldots\ldots + 1$, il est évident que ce coefficient C est la somme des nombres triangulaires, dont le nombre des termes est $m - 2$. Par conséquent, puisque cette somme est $n' \cdot \frac{n'+1}{2} \cdot \frac{n'+2}{3}$, si, à la place de n' on substitue $m-2$, on aura

$$C = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}.$$

4°. Puisque l'on a $D = C' + C'' + C''' + C^{\text{iv}} \ldots\ldots\ldots + 1$, il n'est pas moins clair que ce coefficient D est la somme des nombres pyramidaux dont le nombre des termes est $m-3$. Par conséquent, puisque cette somme est $n'' \cdot \frac{n''+1}{2} \cdot \frac{n''+2}{3} \cdot \frac{n''+3}{4}$, si à la place de n'' on substitue $m-3$, il viendra,

$$D = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}.$$

5°. Puisque l'on auroit de même $E = D' + D'' + D''' + D^{\text{iv}} \ldots + 1$, on voit que ce coefficient E est la somme des nombres qui suivent les nombres pyramidaux, et que cette somme a pour nombre de termes $m-4$. Par conséquent, puisque cette même somme est $n''' \cdot \frac{n'''+1}{2} \cdot \frac{n'''+2}{3} \cdot \frac{n'''+3}{4} \cdot \frac{n'''+4}{5}$, si à la place de n''', on substitue $m-4$, on aura

$$E = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5};$$

ainsi de suite. D'où résulte cette règle connue : *Pour trouver le coefficient d'un terme quelconque, multipliez celui du terme précédent par l'exposant de* x *dans le même terme, et divisez le produit par le nombre des termes qui précèdent le terme que vous cherchez.*

Démonstration des théorêmes sur la courbure des surfaces, énoncés page 86 du 2e volume de la Correspondance.

Par M. Desjardins, *élève de l'Administration des Poudres et Salpêtres.*

Avant de commencer la démonstration de ces théorêmes, je vais examiner ce qui a lieu quand des surfaces se touchent.

Lorsque deux surfaces se coupent suivant n courbes, en cherchant les équations des projections de leur intersection, il arrive qu'une au moins de ces trois équations est décomposable en n facteurs (*) particuliers ; chacun de ces facteurs étant l'équation de la projection de l'une des n courbes. Si l'on suppose que deux de ces n courbes se réduisent à une seule, les facteurs qui les représentoient deviendront égaux, et parmi les n facteurs il y en aura n-2 différens, et un dernier qui sera élevé au carré. Les surfaces se toucheront alors suivant une courbe, et se couperont suivant les n-2 autres ; si trois facteurs deviennent égaux, auquel cas trois courbes se réduisent à une seule, les deux surfaces ont un contact du deuxième ordre suivant cette courbe, et se coupent suivant les n-3 courbes restantes. L'équation de la projection est alors décomposable en n-3 facteurs différens, et en un autre qui est élevé au cube ; et ainsi de suite. Si enfin ces n courbes se réduisent à une seule, les n facteurs deviennent égaux, et l'équation de la projection est la $n^{\text{ième}}$ puissance de l'un d'eux. Les deux surfaces ont un contact du $(n\text{-}1)^{\text{ième}}$ ordre.

Par conséquent, si nous prenons deux surfaces ayant un contact du $(n\text{-}1)^{\text{ième}}$ ordre suivant une courbe, et pouvant se couper suivant plusieurs autres, une au moins des trois équations des projections de leur intersection, contiendra en facteur, la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'équation de la projection sur le plan que l'on considère, de la courbe suivant laquelle elles ont ce contact. L'autre facteur contiendra le produit des équations des projections sur ce même plan de chacune des courbes suivant lesquelles ces surfaces peuvent encore se couper.

(*) Je dis une au moins, parce qu'il peut arriver que ces n courbes soient placées de telle sorte que leurs projections sur deux des plans coordonnés se réduisent à une courbe unique ; mais alors il y aura n courbes différentes sur le troisième plan coordonné.

Ainsi, si les équations de ces surfaces sont mises sous la forme

$$z = F(x,y) \qquad \text{et} \qquad z = f(x,y),$$

le plan des xy, par exemple, devant satisfaire à la condition énoncée, la projection de leur intersection sur ce plan sera

$$F(x,y) - f(x,y) = 0;$$

et si ces surfaces ont un contact du $(n\text{-}1)^{\text{ième}}$ ordre, on devra avoir

$$F(x,y) - f(x,y) = \varphi(x,y)^n \, \psi(x,y) = 0;$$

$\varphi(x,y) = 0$ sera l'équation de la projection horizontale de la courbe de contact, et $\psi(x,y) = 0$ sera le produit des équations des projections des autres courbes d'intersection.

Réciproquement, si les fonctions F et f satisfont à cette condition, les deux surfaces auront un contact du $(n\text{-}1)^{\text{ième}}$ ordre suivant une courbe (*).

PREMIER THÉORÊME.

Si deux surfaces ont un contact de l'ordre $(n-1)$ suivant une courbe, et si par la tangente en un point quelconque de cette courbe, on mène un plan quelconque, ce plan coupera les deux surfaces suivant deux courbes, qui auront un contact de l'ordre n au point que l'on a pris sur la courbe de contact des deux surfaces.

Soient $z = F(x,y)$, $z = f(x,y)$, les équations des deux surfaces; la projection de leur intersection sur le plan horizontal sera

$$F(x,y) - f(x,y) = 0;$$

et si $\varphi(x,y) = 0$ est l'équation de la projection de la courbe suivant laquelle elles ont un contact de l'ordre $(n-1)$, on aura, d'après ce qui a été dit,

$$F(x,y) - f(x,y) = \varphi(x,y)^n \, \psi(x,y) = 0.$$

(*) La vérité de cette réciproque est incontestable.

La projection horizontale de la tangente à la courbe de contact en un point quelconque x', y', a pour équation

$$y - y' = A(x - x'), \text{ dans laquelle } A = \frac{dy'}{dx'} = \frac{-\varphi'}{\varphi_{\prime}}.$$

Les deux surfaces étant situées arbitrairement par rappört au plan des xy, je puis prendre pour plan quelconque, passant par la tangente, le plan qui projette cette tangente, sans rien particulariser.

Cherchant la projection sur le plan des zx, de l'intersection du plan qui projette la tangente, avec les deux surfaces, j'ai

$$z = F(x, y' - Ax' + Ax), \quad z = f(x, y' - Ax' + Ax).$$

Différenciant, il vient

$$\frac{dz}{dx} = F' + F_{\prime} A$$

$$\frac{dz}{dx} = f' + f_{\prime} A.$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F'' + 2 F_{\prime}' A + F_{\prime\prime} A^2$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f'' + 2 f_{\prime}' A + f_{\prime\prime} A^2$$

. . . .

$$\frac{d^n z}{dx^n} = F^{(n)'} + \frac{n}{1} F_{\prime}^{(n-1)'} A + \frac{n(n-1)}{1.2} F_{\prime\prime}^{(n-2)'} A^2 \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots n} F_{(n)_{\prime}} A^n$$

$$\frac{d^n z}{dx} = f^{(n)'} + \frac{n}{1} f_{\prime}^{(n-1)'} A + \frac{n(n-1)}{1.2} f_{\prime\prime}^{(n-2)'} A^2 \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2\,1}{1.2\ldots\ldots\ldots n} f_{(n)_{\prime}} A^n.$$

Voyons maintenant si ces coefficiens différentiels deviennent égaux chacun à chacun, au point x' y'; pour cela j'observe que l'on a

$$F(x,y) - f(x,y) = \varphi(x,y)^n \psi(x,y)$$

Différenciant aux différences partielles, on a

$$F' - f' = n\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{n-1}\,\varphi' + \varphi(x,y)^n\,\psi'$$
$$F_{\prime} - f_{\prime} = n\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{n-1}\,\varphi_{\prime} + \varphi(x,y)^n\,\psi_{\prime}$$
$$F'' - f'' = n(n-1)\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{n-2}\,(\varphi')^2 + \&\ (*)$$
$$F'_{\prime} - f'_{\prime} = n(n-1)\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{n-2}\,\varphi'\,\varphi_{\prime} + \&$$
$$F_{\prime\prime} - f_{\prime\prime} = n(n-1)\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^{n-2}\,(\varphi_{\prime})^2 + \&$$

. . . .

$$F^{(n)'} - f^{(n)'} = n(n-1)\ldots3.2.1.\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^0\,(\varphi')^n + \&$$
$$F_{\prime}^{(n-1)'} - f_{\prime}^{(n-1)'} = n(n-1)\ldots3.2.1.\,\psi(x,y)\,\overline{\varphi(x,y)}^0\,(\varphi')^{n-1}\,\varphi_{\prime} + \&$$

. . . .

$$F_{(m)'}^{(n-m)'} - f_{(m)'}^{(n-m)'} = n(n-1)\ldots3.2.1.\psi(x,y).\overline{\varphi(x,y)}^0\ (\varphi')^{n-m}(\varphi_{\prime})^m + \&$$

. . . .

$$F_{(n)} - f_{(n)} = n(n-1)\ldots3.2.1\,\psi(x,y)\,\varphi(x,y)^0(\varphi')^0(\varphi_{\prime})^n + \&$$

Faisant dans ces expressions $x=x'$, $y=y'$, comme $\varphi(x',y')=0$, on voit que pour ce point les coefficiens des $(n-1)$ premiers ordres, sont égaux, puisque, pour tous ces coefficiens, leur différence est multipliée par $\varphi(x',y')$; ce qui signifie que les deux surfaces ont un contact de l'ordre $(n-1)$.

On a ensuite pour la différence de deux mêmes coefficiens quelconques du $n^{\text{ième}}$ ordre,

$$F_{(m)}^{(n-m)'} - f_{(m)'}^{(n-m)'} = n(n-1)\ldots3.2.1\,\psi(x',y').(\varphi')^{n-m}(\varphi_{\prime})^m.$$

Maintenant les coefficiens différentiels des deux courbes sont

(*) Tous les termes compris dans le signe & sont multipliés par une puissance de $\varphi(xy)$, plus élevée que celle qui affecte la même fonction dans le premier terme de chaque suite dont ils font partie.

égaux chacun à chacun, jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre, d'après ce qu'on vient d'obtenir; retranchons donc les deux valeurs de $\frac{d^n z}{d x^n}$ l'une de l'autre, nous aurons une série dont le terme général, au coefficient près, sera

$$\left\{ F^{(n-m)'}_{(m)} - f^{(n-m)'}_{(m)'} \right\} A^m.$$

Mais $A = \frac{-\varphi'}{\varphi_{\prime}}$, ce terme deviendra donc égal à

$$n(n-1)\ldots 3.2.1\,\psi(x',y')\,(\varphi')^n\,(\pm 1),$$ selon que m sera positif ou négatif.

La différence des deux coefficiens de l'ordre n sera par conséquent

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.\psi(x',y')(\varphi')^n \left\{ 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \&c \right\}$$

Mais d'après une propriété connue des coefficiens du binôme de Newton, quel que soit l'exposant entier positif, la somme des coefficiens de rang pair est égale à la somme des coefficiens de rang impair; et comme dans cette série ces deux sommes sont de signes contraires, il s'ensuit que la différence des deux coefficiens de l'ordre n est nulle; par conséquent les projections des deux courbes ont un contact de l'ordre n au point $x'\,y'$. Ces deux courbes planes ont donc elles-mêmes ce contact.

C. Q. F. D.

Deuxième Théorême.

Etant donnée une surface courbe quelconque et un point P sur cette surface, soient menés par ce point un plan tangent à la surface et une suite de plans sécans parallèles au plan tangent. Deux courbes quelconques C et C' passant par le point de contact P, rencontrent chacun des plans sécans en deux points c et c'; si on fait mouvoir la section de la surface dans son

plan, de manière que chacun des points de cette section parcourre une droite parallèle et égale à celle qui unit les deux points c et c', *le lieu des sections parallèles transportées chacune dans son plan d'après la même loi, est une nouvelle surface qui est osculatrice de la surface donnée.*

Démonstration.

Soit $z = F(x,y)$ l'équation de la surface courbe donnée. Je lui mène un plan tangent, et je prends le plan des x,y, parallèle à ce plan tangent. J'appelle a, b, c, les coordonnées du point de contact. Il faudra que l'on ait $c = F(a,b)$, et le plan tangent ayant pour équation $z = c$, on aura encore

$$\frac{d.F(a,b)}{da} = 0 \qquad \frac{d.F(a,b)}{db} = 0 \qquad (*)$$

Si par le point a, b, c je fais passer deux courbes quelconques, leurs équations pourront être mises sous la forme

$$x - a = (z - c)\pi(z), \quad y - b = (z - c)\pi(z)$$

pour la première, et pour la deuxième,

$$x - a = (z - c)\psi(z), \quad y - b = (z - c)\varphi(z)$$

Je coupe la surface et ces deux courbes par un plan $z = \gamma$ parallèle au plan tangent : j'ai pour projection horizontale de la section $\gamma = F(x, y)$ qui représente la courbe CD.

La première courbe est coupée en un point dont la projection M a pour coordonnées

$$x = a + (\gamma - c)\pi(\gamma) \text{ et } y = b + (\gamma - c)\pi(\gamma)$$

La deuxième est coupée en un point projeté en N, dont les coordonnées sont

$$x = a + (\gamma - c)\psi(\gamma) \text{ et } y = b + (\gamma - c)\varphi(\gamma)$$

(*) Si les plans des coordonnées étoient donnés, ces deux équations et celle-ci $c = F(a, b)$ serviroient à déterminer les coordonnées a, b, c du point où le plan tangent est parallèle au plan des xy.

Pendant que chaque point de la section de la surface par le plan horizontal $z = \gamma$ parcourt une ligne parallèle et égale à celle qui unit les deux points d'intersection de ce même plan avec les deux courbes données, il est évident que chaque point de la projection CD de cette section parcourt une ligne égale et parallèle à MN, et cette courbe prend la position $C'D'$.

Cherchons donc l'équation de la courbe $C'D'$ qui est la projection horizontale de la section transportée d'après la loi donnée.

Il est clair qu'il suffit, pour cela, de substituer dans l'équation obtenue de la courbe CD, au lieu de x et y, $x + M'R'$ et $y + N'R'$, mais $M'R' = MR = AQ - AP = (\gamma - c)(\psi(\gamma) - \pi(\gamma))$ et $N'R' = NR = NQ - MP = (\gamma - c)(\varphi(\gamma) - \pi(\gamma))$. Par conséquent l'équation de $C'D'$ sera

$$\gamma = F\Big(x + (\gamma - c)(\psi(\gamma) - \pi(\gamma)),\ y + (\gamma - c)(\varphi(\gamma) - \pi(\gamma))\Big).$$

Si l'on joint à cette équation celle-ci $z = \gamma$, on aura les équations de la section de la surface par un plan quelconque parallèle au plan tangent, transportée suivant la loi donnée.

Eliminant γ entre ces deux équations, j'aurai l'équation de la surface, lieu de toutes les sections transportées d'après la même loi. Cette équation est :

$$z = F\Big(x + (z - c)(\psi(z) - \pi(z)),\ y + (z - c)(\phi(z) - \pi(z))\Big).$$

Il s'agit de prouver à présent que cette surface est osculatrice de la première au point a, b, c. Je fais, pour abréger

$$(z - c)(\psi(z) - \pi(z)) = fz, \text{ et } (z - c)(\phi(z) - \pi(z)) = \mathrm{f}z,$$

et j'ai :
$$z = F(x + fz, y + \mathrm{f}z)$$

Différenciant aux différences partielles, j'ai

$$p = (1 + pf'z)F' + p\,\mathrm{f}'z\,F_{\prime} \quad (*)$$
$$q = qf'z\,F' + (1 + q\,\mathrm{f}'z)\,F_{\prime}$$

(*) Je note le coefficient différentiel partiel du $n^{\text{ième}}$ ordre de la fonction F, pris en regardant $x + fz$ comme une seule variable, par F^n ; le coefficient du même ordre pris par rapport à $y + fz$ par F_n ; et enfin F^m_n indique le coefficient différentiel de F pris m fois par rapport à $x + fz$, et n fois par rapport à $y + fz$.

$$r=(1+pf'z)^2F''+pf'z(1+pf'z)F_{\prime}'+p^2f''zF'+rf'zF'+$$
$$+p\text{f}'z(1+pf'z)F_{\prime}'+p^2(\text{f}'z)^2F_{\prime\prime}+p^2\text{f}''zF_{\prime}+r\text{f}'zF_{\prime}.$$

$$s=qf'z(1+pf'z)F''+(1+q\text{f}'z)(1+pf'z)F_{\prime}'+pqf''zF'+sf'zF'+$$
$$+pq\text{f}'zf'zF_{\prime}'+p\text{f}'z(1+q\text{f}'z)F_{\prime\prime}+pq\text{f}''zF_{\prime}+s\text{f}'zF_{\prime}.$$

$$t=q^2(f'z)^2F''+qf'z(1+q\text{f}'z)F_{\prime}'+q^2f''zF'+tf'zF'+$$
$$+qf'z(1+q\text{f}'z)F_{\prime}'+(1+q\text{f}'z)^2F_{\prime\prime}+q^2\text{f}''zF_{\prime}+t\text{f}'zF_{\prime}$$

Je fais dans ces expressions $x=a$, $y=b$, $z=c$, et j'observe auparavant que les fonctions fz et $\text{f}z$ s'annullant dans cette hypothèse, les quantités F', $F_{\prime}$, F'', $F_{\prime}'$, et $F_{\prime\prime}$ deviennent respectivement

$$\frac{dF(a,b)}{da},\ \frac{d.F(a,b)}{db},\ \frac{d^2F(a,b)}{da^2},\ \frac{d^2F(a,b)}{dadb}\ \text{et}\ \frac{d^2F(a,b)}{db^2}\ (*).$$

On se convaincra aisément de cette vérité, en développant d'abord par le théorême de Taylor, $F(x+fz, y+\text{f}z)$, puis en différenciant le développement, et faisant après

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c;$$

ce que je n'ai pas fait pour abréger le calcul.

D'abord l'on a $\quad F'=0,\qquad F_{\prime}=0,$

puisque $\dfrac{d.F(a,b)}{da}=0$, et $\dfrac{d.F(a,b)}{db}=0$; il vient donc

$$p=0,\qquad q=0;$$

ce qui signifie que les deux surfaces sont tangentes au point a, b, c, résultat évident d'après la génération de la dernière surface.

L'on a, en outre,

$$r=\frac{d^2F(a,b)}{da^2},\ s=\frac{d^2F(a,b)}{dadb}\ \text{et}\ t=\frac{d^2F(a,b)}{db^2};$$

ce qui prouve que les deux surfaces sont osculatrices au même point.

(*) Je n'entends, par ces expressions, que ce que deviennent les divers coefficiens différentiels partiels de $F(x,y)$, lorsqu'on y a fait $x=a$, $y=b$, $z=c$.

On est sûr qu'elles n'ont point alors de contact du troisième ordre, car on trouve, en différenciant r par rapport à x, et faisant $x = a$, $y = b$, $z = c$:

$$u = \frac{d^3 F(a,b)}{d a^3} + 3\left(\frac{d^2 F(a,b)}{d a^2}\right)^2 . f' c$$
$$+ 3 \frac{d^2 F(a,b)}{d a^2} . \frac{d^2 F(a,b)}{d a\, d b} . f' c.$$

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Par M. Puissant.

On trouve à la suite d'un petit traité de trigonométrie sphérique que M. Hachette a donné dans le n°. 8 du premier volume de cette Correspondance, la démonstration d'un théorême de M. Legendre, sur les triangles sphériques dont les trois côtés sont très-peu courbes, lequel est fort utile dans les opérations géodésiques. Je pense qu'il n'est pas moins intéressant de faire connoître le parti que l'on peut tirer de quelques formules de trigonométrie, pour résoudre un triangle sphérique, dont un côté seulement est très-petit, par rapport au rayon de la sphère; parce que c'est de là que dépend la détermination des latitudes et longitudes des principaux lieux terrestres qui ont été liés entr'eux par une chaîne de triangles, et que l'on se propose de projeter sur une carte.

Par exemple, soient PM, PM' (*fig.* 2), deux méridiens de la terre supposée sphérique, et P le pôle; L la latitude du point M ; L' celle du point M'; P la différence de longitude de ces mêmes points, ou l'angle au pôle; enfin V, V' les inclinaisons de la *ligne géodésique* $MM' = \phi$ sur les méridiens respectifs PM, PM', ou ses *azimuths*. On demande de déterminer L', V', et P, lorsque L, V et P sont connus.

On voit évidemment qu'il s'agit de résoudre un triangle sphérique dont on connoît deux côtés et l'angle compris, et c'est ce qui ne présente en général aucune difficulté. Mais comme un de ces côtés est supposé très-petit par rapport aux deux autres, la latitude L' et l'azimuth V' cherchés, diffèrent toujours très-peu

respectivement de la latitude L et de l'angle azimuthal V connus ; et parce que les tables de logarithmes ne comportent qu'une exactitude limitée, il est plus convénable de calculer les valeurs de $L' - L$ et de $V' - V$, et de substituer à cet effet aux formules rigoureuses applicables au cas dont il s'agit, des formules approximatives qui soient moins dépendantes de l'erreur des tables : or, c'est à quoi l'on parvient par la voie des séries, ainsi que je vais le faire voir.

Il est démontré à la page 276 du premier volume de cette Correspondance, que dans un triangle sphérique ABC (*fig.* 3), on a les relations suivantes :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cot B \sin C = \cot b \sin a - \cos a \cos C$$
$$\cot C \sin B = \cot c \sin a - \cos a \cos B ;$$

mais ces deux dernières donnent

$$\text{tang } B = \frac{\sin C}{\cot b \sin a - \cos a \cos C},$$

$$\text{tang } C = \frac{\sin B}{\cot c \sin a - \cos a \cos B},$$

et en adoptant la notation que présente la *fig.* 2, l'on a

$$(1) \qquad \sin L' = \sin L \cos \varphi - \cos V \cos L \sin \varphi$$

$$(2) \qquad \text{tang } V' = \frac{\sin V}{\text{tang } L \sin \varphi + \cos V \cos \varphi}$$

$$(3) \qquad \text{tang } P = \frac{\sin V \sin \varphi}{\cos L \cos \varphi + \cos V \sin L \sin \varphi}.$$

Proposons-nous d'abord d'ordonner le second membre de l'équation (1), par rapport aux puissances ascendantes de l'arc φ : or, on a, comme l'on sait,

$$(m) \qquad \sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3} \ldots, \; \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \ldots .$$

et puisque φ est très-petit par rapport au rayon de la sphère, on

peut ne prolonger le développement que jusques aux termes en φ^3 inclusivement ; on a donc sur-le-champ

(4) $$\sin L' = \sin L - \cos V \cos L . \varphi - \tfrac{1}{2} \sin L . \varphi^2 + \tfrac{1}{6} \cos V \cos L . \varphi^3.$$

Un des moyens simples d'avoir la valeur de L' en série, procédant de même suivant les puissances de φ, est de faire

(5) $$L' = L + P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3 + \ldots .$$

P, Q, R, étant des coefficiens indéterminés, dont on obtiendra la valeur ainsi qu'il suit :

Prenant le sinus de chaque membre de cette dernière équation, et rejetant toujours les termes au-dessus de l'ordre φ^3, on aura

$$\sin L' = \sin L \cos (P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3) + \cos L \sin (P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3)$$

ou en vertu des séries (m),

$$\sin L' = \sin L \left(1 - \frac{P^2 \varphi^2}{2} - PQ\varphi^3 \right) + \cos L \left(P\varphi + Q\varphi^2 + R\varphi^3 - \frac{P^3 \varphi^3}{6} \right);$$

et par conséquent

(6) $$\sin L' = \sin L + \cos L . P\varphi + \cos L . Q\varphi^2 + \cos L . \left(R - \frac{P^3}{6} \varphi^3 \right) - \tfrac{1}{2} \sin L . P^2 \varphi^2 - \sin L . PQ\varphi^3.$$

égalant cette valeur de sin L' à celle (4), on aura une équation identique de laquelle on déduira les valeurs des coefficiens P, Q, R, et l'on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$P = -\cos V$$
$$Q = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} L \sin^2 V$$
$$R = \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 L \right) \cos V \sin^2 V;$$

donc la série (5) sera

$$L' = L - \varphi \cos V - \tfrac{1}{2}\varphi^2 \sin^2 V \operatorname{tang} L + \tfrac{1}{2}\varphi^3 \cos V \sin^2 V . (\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 L).$$

Telle est celle qui, sur la sphère, donne la latitude du point M', connoissant la plus courte distance MM', ou φ, l'azimuth V compté du nord à l'est, et la latitude L du point M de départ.

Pour trouver la différence des azimuths V', V, par un procédé analogue au précédent, on substituera dans la formule

$$\operatorname{tang}(V' - V) = \frac{\operatorname{tang} V' - \operatorname{tang} V}{1 + \operatorname{tang} V' \operatorname{tang} V},$$

pour tang V' sa valeur (2), et l'on aura

$$\operatorname{tang}(V' - V) = \frac{\sin V \cos V . (1 - \cos\varphi) - \sin V \operatorname{tang} L \sin\varphi}{1 - \cos^2 V . (1 - \cos\varphi) + \cos V \operatorname{tang} L \sin\varphi},$$

et à cause des séries (m)

$$\operatorname{tang}(V' - V) = \frac{\sin V \cos V . \dfrac{\varphi^2}{2} - \sin V \operatorname{tang} L . \left(\varphi - \dfrac{\varphi^3}{6}\right)}{1 - \cos^2 V . \dfrac{\varphi^2}{2} + \cos V \operatorname{tang} L . \left(\varphi - \dfrac{\varphi^3}{6}\right)};$$

réduisant le second membre en série par la formule du binome, on obtiendra après les réductions

$$\operatorname{tang}(V' - V) = -\varphi \sin V \operatorname{tang} L + \varphi^2 \sin V \cos V (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L) - \varphi^3 \sin V \cos^2 V \operatorname{tang} L . (1 + \operatorname{tang}^2 L) + \frac{\varphi^3}{6} \sin V \operatorname{tang} L;$$

mais en général

$$V' - V = \operatorname{tang}(V' - V) - \frac{\operatorname{tang}^3 (V' - V)}{3} + \ldots$$

donc en faisant attention que $\sin^3 V = \sin V(1 - \cos^2 V)$

$$V' = V - \varphi \sin V \tang L + \varphi^2 \sin V \cos V.(\tfrac{1}{2} + \tang^2 L)$$
$$- \varphi^3 \sin V \cos^2 V.(1 + \tfrac{4}{3}\tang^2 L)$$
$$+ \varphi^3 \sin V \tang L.(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\tang^2 L),$$

Cette formule fera donc connoître l'azimuth V'.

Il reste à obtenir la différence P de longitude : pour cet effet, l'on substituera dans l'équation (3) pour $\tang \varphi$ sa valeur en série, et l'on aura d'abord

$$\tang P = \frac{\sin V \tang \varphi}{\cos L + \cos V \sin L \tang \varphi}$$
$$= \frac{\sin V.\left(\varphi + \dfrac{\varphi^3}{3}\right)}{\cos L.\left(1 + \cos V \tang L.\left(\varphi + \dfrac{\varphi^3}{3}\right)\right)},$$

puis développant en série, il viendra

$$\tang P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L} - \varphi^2 \frac{\sin V \cos V \tang L}{\cos L}$$
$$+ \frac{\varphi^3}{3}\frac{\sin V}{\cos L} + \varphi^3 \frac{\sin V \cos^2 V \tang^2 L}{\cos L},$$

et parce que

$$P = \tang P - \tfrac{1}{3}\tang^3 P + \ldots$$

on aura

$$P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L} - \varphi^2 \frac{\sin V \cos V \tang L}{\cos L}$$

$$+ \varphi^3 \left(\frac{1}{3}\frac{\sin V}{\cos L} + \frac{\sin V \cos^2 V \tang^2 L}{\cos L} - \frac{1}{3}\frac{\sin^3 V}{\cos^3 L}\right);$$

mais

$$\sin^3 V = \sin V(1 - \cos^2 V), \text{ et } \frac{1}{\cos^3 L} = \frac{1 + \tang^2 L}{\cos L},$$

donc toute simplification faite,

$$P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L} - \varphi^2 \frac{\sin V \cos V \operatorname{tang} L}{\cos L} + \tfrac{1}{3}\varphi^3 \sin V \cos^2 V . (4 \operatorname{tang}^2 L + 1) - \tfrac{1}{3}\varphi^3 \frac{\sin V}{\cos L} \operatorname{tang}^2 L.$$

Le problême est donc complètement résolu : j'observerai cependant que la valeur de P seroit plus simple, si on la rendoit fonction de la latitude L' : en effet, dans le triangle sphérique PMM', fig. 2, on a évidemment

$$\sin P = \frac{\sin \varphi \sin V}{\cos L'} = \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) \frac{\sin V}{\cos L'};$$

mais $\quad P = \sin P + \frac{\sin^3 P}{6} + \ldots .$

donc

$$P = \varphi \frac{\sin V}{\cos L'} - \varphi^3 \frac{\sin V}{\cos L'} . \left(\frac{1}{6} - \frac{\sin^2 V}{\cos^2 L'}\right).$$

J'ai fait voir ailleurs comment on obtenoit ces séries par le moyen du théorême de Taylor ; mais j'ai voulu parvenir ici au même but, à l'aide d'une méthode absolument élémentaire, afin de suppléer à ce qui manque dans tous les traités de trigonométrie.

Pour appliquer réellement le calcul numérique à ces formules, il est nécessaire d'y écrire $\frac{\varphi}{r}$ au lieu de φ, r étant le rayon de la terre. De plus, pour avoir $L' - L$, $V' - V$ et P en secondes de degrés décimaux, on doit multiplier tous les termes en φ, par $\frac{2000000''}{\pi}$, π représentant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$.

Il faut pourtant prévenir que, dans la pratique de la géodésie, l'on rejette des formules précédentes tous les termes qui sont multipliés par la troisième puissance du côté φ, vu sa petitesse ; mais qu'il est nécessaire, pour plus d'exactitude, d'introduire dans la formule par laquelle on calcule la latitude, les

termes dépendans de l'excentricité de la terre, dont la surface, abstraction faite de ses inégalités, est sensiblement celle d'un sphéroïde de révolution aplati aux pôles, et de remplacer r par le rayon de courbure de l'arc φ; cela nous engageroit dans des détails et des théories qu'il n'appartient pas de donner ici.

Formule générale pour déterminer l'aire d'un polygone rectiligne quelconque.

Dans la plupart des nouveaux traités de géométrie analytique, on donne l'expression de l'aire d'un triangle rectiligne, en fonction des coordonnées des sommets de ses angles : rien n'est plus facile que d'en obtenir une semblable pour un polygone d'un nombre n de côtés; la voici :

Soient $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$; ..... x_n y_n

les coordonnées rectangulaires des sommets des angles d'un polygone rectiligne quelconque, et S l'aire de sa surface; on aura

$$S = \tfrac{1}{2}[(y_2-y_n)x_1+(y_3-y_1)x_2+(y_4-y_2)x_3+(y_5-y_3)x_4 \ldots\ldots + (y_1-y_{n-1})x_n]$$

formule dont la loi des termes est manifeste.

Note sur les propriétés de la Projection stéréographique.

Par M. Hachette.

Le centre et le rayon d'une sphère étant donnés, on obtient la projection stéréographique d'une ligne quelconque, tracée sur la surface de la sphère, en considérant un point déterminé de cette surface, comme le sommet d'un cône qui a pour base la ligne qu'il s'agit de projeter; la projection de cette ligne résulte de l'intersection du cône, et d'un plan mené par le centre de la sphère, perpendiculairement au rayon qui correspond au sommet de ce cône.

On a vu (page 76 du 1er. volume de la Correspondance que la projection stéréographique jouit de ces deux propriétés

1°. Que tous les cercles de la sphère se projettent suivant d'autres cercles.

2°. Que deux sections quelconques se coupent toujours sous le même angle que leurs projections; d'où il résulte que toute figure peu étendue en tous sens sur la sphère, est représentée par une figure semblable sur le plan de projection.

En démontrant synthétiquement ces deux propositions (page 363 du 1er. vol. de la Correspondance), je me suis servi des expressions usitées, *section sous-contraire section anti-parallèle,* pour distinguer les sections parallèles aux deux systêmes de plans qui coupent un cône oblique suivant des cercles; on s'exprimeroit plus correctement, en nommant la section circulaire d'un cône oblique, et la section *sous-contraire*, les sections du cône oblique par une même sphère, ou par toute autre surface du second degré.

Le cône oblique étant ce que devient un *hyperboloïde elliptique*, dont la section principale elliptique se réduit à un point, et ayant démontré dans notre traité des surfaces du 2e. degré, que cette dernière surface peut être engendrée par un cercle de deux manières différentes, cette double génération par le cercle s'applique également au cône oblique. On arrive à la même conclusion par la considération suivante : deux surfaces du 2e. degré qui se pénètrent, se coupent suivant une ligne dont les projections sont en général des courbes du 4e. degré; mais dans quelques cas particuliers, les équations de ces deux surfaces sont équivalentes à deux équations du second degré entre trois variables, dont l'une se décompose en deux facteurs du premier degré. Lorsque cette décomposition a lieu, les facteurs du 1er degré sont les équations des plans qui contiennent les deux courbes du second degré, qu'on obtient par l'intersection des deux surfaces. L'une de ces courbes étant plane, l'autre l'est nécessairement. D'où il suit qu'un cône qui a pour base un cercle d'une sphère, coupe cette même sphère suivant un autre cercle, quel que soit le sommet du cône. Il suit de cette dernière proposition, qu'on doit considérer les deux sections circulaires d'un cône oblique, situées dans des plans non parallèles, comme la ligne d'intersection du cône et de la sphère qui passent par ces deux sections.

En démontrant (page citée, 363) la seconde propriété de la projection stéréographique, j'ai supposé qu'on s'aideroit d'une figure que je n'ai pas tracée; il m'a paru que la démonstration deviendroit plus claire, en y ajoutant la figure que je vais expliquer.

Ayant mené par le point commun à deux sections de la sphère, une tangente à chacune d'elles, et projetant l'angle des deux tangentes par des droites concourantes au point A d'une sphère

(*fig.* 4), il s'agit de faire voir que la projection de cet angle sur un plan de grand cercle de la sphère, perpendiculaire au rayon *AC*, ne diffère pas de l'angle projeté. Soit *AE* la droite d'intersection des plans menés par le point *A* et par chacune des tangentes. L'angle des tangentes est dans un plan *LM*, tangent à la sphère, et perpendiculaire au rayon *CE*; et la projection de cet angle est dans le plan *HG*, perpendiculaire au rayon *AC*. Or le plan *HG*, ou un parallèle *hEg*, et le plan *LM* font avec la droite *AE* des angles égaux, et ils sont perpendiculaires à un même plan *ACE* passant par cette droite; d'où il suit qu'ils coupent les plans menés par le point *A* et par les deux tangentes, suivant des angles égaux.

En effet, considérant l'intersection *AE* (fig. 5) de ces plans sur un plan vertical *AME*, soit *BAC* l'angle de ces mêmes plans sur le plan horizontal *AMBC*; si on les suppose coupés par deux autres plans *EM*, *Eh*, qui font avec la droite *AE* des angles égaux *AEM*, *AEh*, et qui sont perpendiculaires à un plan passant par cette droite, on peut démontrer que les sections angulaires seront égales. L'angle contenu dans le plan *EMBC*, a pour projection horizontale *BAC*, et pour projection verticale *EM*; il est opposé au côté *BC* du triangle qui a aussi pour projections *BAC* et *EM*. Si par le point *A'* distant du point *E* de *EA'* = *EA*, on mène un plan horizontal *A'g*, ce plan coupera le plan *Ehg* suivant une horizontale *g*, et la portion de cette horizontale comprise entre les côtés de l'angle contenu dans le plan *hEg* est évidemment égale à *BC*; donc le second angle qui a la même projection horizontale *ABC* que le premier, est opposé au côté *BC* d'un triangle qui se projette verticalement en *Eg* = *EM*. Ce second triangle est évidemment égal à celui qui se projette en *BAC* et *EM*, donc les angles de ces deux triangles, opposés à l'horizontale qui se projette en *BC* et en *M* pour l'un, en *BC* et en *g* pour l'autre, sont égaux. Donc *fig.* (4), l'angle des deux tangentes contenues dans le plan *EM*, et l'angle de sa projection stéréographique sur le plan *HG* ou son parallèle *hg*, sont égaux.

C. D. F. D.

Solution analytique du problême(*) *énoncé pag.* 57 *du* 2e *cahier du* 2e *volume de la Correspondance.*

Par M. Hachette.

Soient ET (fig. 6) la longitude donnée, TM la projection de l'axe de la terre sur l'écliptique, PTM l'angle de cet axe avec le plan de l'écliptique, construit dans le plan vertical du triangle PTM qui coupe le plan vertical TN du cercle de séparation du jour et de la nuit suivant une verticale TQ; ayant projeté l'axe de la terre sur le plan vertical TN, cet axe, sa projection et la verticale TQ forment un triangle sphérique, dans lequel on connoît l'angle NTM et les deux côtés adjacens à cet angle, formés par la verticale QT, l'axe TP, et la projection de cet axe TP sur le plan vertical TN.

Nommant I l'angle de l'axe de la terre avec le plan de l'écliptique, L la longitude ET du soleil, et prenant le rayon ST de l'écliptique pour le rayon des tables, l'angle $QTP = E = 90° - I$; l'angle $NTM = L$.

Ayant abaissé du point M la perpendiculaire MN sur TN, et ramenant le point N en N' par un arc de cercle, si par le point N' on élève la perpendiculaire $N'P'$ égale à MP, QTP' sera l'angle que la verticale TQ fait avec la projection de l'axe de la terre sur le plan TN; on a démontré, pag. 57 du 2e cahier de ce volume, que les angles QTP', QTP, sont les faces adjacentes à un angle MTN d'une pyramide, dont la troisième face est le complément de la latitude du parallèle demandé; cette troisième face se calcule par la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

a, b, c, étant les trois faces de la pyramide, et A l'angle opposé à la face a.

(*) *Problême.* Etant donnée la position de l'axe de la terre pour un jour de l'année, trouver le parallèle à l'équateur qui, pour cette époque, est la limite des parallèles qui sont tout entiers dans l'hémisphère éclairé par le soleil, ou tout entiers dans l'ombre de cet astre.

Calcul pour trouver la latitude du parallèle à l'équateur demandé.

$$TM = \sin L \ldots (ST = 1)$$

à cause des triangles semblables TMS, TMN, on a

$$TS : SM :: TM : TN = \sin L \cos L. = TN'.$$

Le triangle MTP donne

$$\cos I : \sin L :: \sin I : PM = \frac{\sin I \sin L}{\cos I}. = P'N'.$$

Dans le triangle $P'TN'$, on a

$$P'N' : N'T :: 1 : \text{tang } TP'N' = \text{tang } QTP'$$

$$\text{donc, tang } QTP' = \frac{\sin L \cos L}{\left(\frac{\sin I \sin L}{\cos I}\right)} = \frac{\cos I \cos L}{\sin I};$$

$$\cos QTP' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 I \cos^2 L}{\sin I^2}}} = \frac{\sin I}{\sqrt{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}} = \cos c$$

$$\sin QTP' = \frac{\frac{\cos I \cos L.}{\sin I.}}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 I \cos^2 L}{\sin^2 I}}} = \frac{\cos I \cos L}{\sqrt{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}} = \sin c$$

d'ailleurs on a : $\cos b = \sin I$; $\sin b = \cos I$; $A = L$;

donc :

$$\cos a = \frac{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}{\sqrt{\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 L}} = \sqrt{1 - \cos^2 I \sin^2 L}.$$

Soit X la latitude cherchée,

$$\sin X = \sqrt{1 - \cos^2 I \sin^2 L} = \sqrt{1 - \sin^2 E \sin^2 L},$$

E étant l'angle des plans de l'équateur et de l'écliptique.

Note sur la transformation des coordonnées obliques, en d'autres coordonnées obliques, qui ont même origine.

Par M. HACHETTE.

Si l'on conçoit un parallélipipède qui a pour diagonale la droite menée de l'origine à un point mené dans l'espace, et pour arètes, des droites parallèles aux axes des coordonnées, les trois arètes de ce parallélipipède qui aboutissent au point donné, sont les coordonnées de ce point; la diagonale est le 4e côté d'un quadrilatère gauche dont les trois autres côtés sont des droites égales aux coordonnées. Dans un très-beau mémoire de M. Carnot (imprimé en 1806), sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, ce géomètre a donné (page 61) les équations par lesquelles on passe d'un systême de coordonnées obliques, à un autre systême de coordonnées obliques, et il arrive à ces équations par une méthode extrêmement élégante, fondée sur ce théorême connu de géométrie, que dans tout polygone, plan ou gauche, chacun des côtés est égal à la somme de tous les autres, multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier. » D'après ces équations, qui sont toutes linéaires, on obtient facilement par l'élimination, les valeurs des coordonnées anciennes, en coordonnées nouvelles; j'ai déjà fait voir (page 7, 2e vol.) que les équations qui donnent directement ces valeurs, exprimoient des propriétés de l'espace que j'ai démontrées par la synthèse; c'est cette même théorie que je vais exposer d'une manière qui me paroît plus simple.

Nommons x, y, z, les coordonnées obliques d'un point de l'espace; x', y', z', les nouvelles coordonnées obliques, qui ont même origine que les premières, et supposons que chaque axe des nouvelles coordonnées soit donné par les trois angles qu'il forme avec les plans des coordonnées primitives, en remarquant que de ces trois angles, deux seulement sont nécessaires. Ayant imaginé par l'origine des coordonnées, trois axes auxiliaires perpendiculaires aux plans primitifs des xy, des xz, des yz, désignons-les par les trois lettres Z, Y, X. Il est évident que les angles des axes auxiliaires et des axes des nouvelles coordonnées x', y', z' sont connus, puisqu'ils sont les complémens de ceux que ces derniers axes font avec les plans des coordonnées primitives; nous les désignerons comme M. Carnot, par les deux lettres (mises en parenthèse) qui distinguent les côtés de l'angle.

Maintenant la question est de trouver directement la valeur des coordonnées x, y, z, en fonctions des coordonnées x', y', z' et des neuf angles que les axes de ces nouvelles coordonnées font avec les droites X, Y, Z. Avant de résoudre cette question, il faut définir un nouveau mode de projection, dont nous ferons usage, et qui consiste à projeter un système de points donnés, sur une droite fixe, par des plans perpendiculaires à cette droite; le plan mené par un des points donnés perpendiculairement à la droite fixe, coupe cette droite en un point qui en est la projection. Cette espèce de projection jouit de deux propriétés : 1°. tout ce qui est contenu dans un plan perpendiculaire à la droite *de projection* se projette sur cette droite suivant un seul point ; 2°. la longueur de la projection d'une droite est égale à la longueur de cette droite multipliée par le cosinus de l'angle, qu'elle fait avec la ligne de *projection*.

Cela posé, la droite menée par l'origine des coordonnées à un point déterminé de l'espace, et les droites égales et parallèles aux coordonnées x, y, z, x', y', z', forment deux quadrilatères gauches, qui ont la première droite pour côté commun; il est évident que les projections de ces deux quadrilatères sur l'une quelconque des trois droites X, Y, Z, sont égales. Or, la projection des coordonnées x, y, z, se réduit toujours à la projection de l'une d'elles; ainsi, lorsqu'on les projette sur la droite X, elle se réduit à la projection de x, car y et z, situées dans un plan perpendiculaire à la droite X, se projettent en un seul point, qui est aussi la projection de l'extrémité de x; mais la projection de x sur la droite X a pour expression $x \cos(x, X)$; donc cette quantité exprime aussi la projection de l'un des quadrilatères gauches. Les projections de x', y', z', sur la même droite X ont pour expressions respectivement

$$x' \cos(x', X),\ y' \cos(y', X),\ z' \cos(z', X).$$

Or, la somme de ces trois quantités est égale à la projection du second quadrilatère gauche, qui est elle-même égale à celle du premier quadrilatère ; donc on a l'équation :

$$(E) \begin{cases} x \cos(x,X) = x' \cos(x',X) + y' \cos(y',X) + z' \cos(z',X). \\ \text{Par la même raison, on a les deux autres équations :} \\ y \cos(y,Y) = x' \cos(x',Y) + y' \cos(y',Y) + z' \cos(z',Y) \\ z \cos(z,Z) = x' \cos(x',Z) + y' \cos(y',Z) + z' \cos(z',Z). \end{cases}$$

Lorsque les axes des x, des y, des z, sont perpendiculaires entr'eux, les droites X, Y, Z, sont perpendiculaires entr'elles, et se confondent avec les axes mêmes, et on a les équations de condition :

$$\cos(x, X) = 1, \cos(y, Y) = 1, \cos(z, Z) = 1.$$
$$\cos^2(x', X) + \cos^2(x', Y) + \cos^2(x', Z) = 1.$$
$$\cos^2(y', X) + \cos^2(y', Y) + \cos^2(y', Z) = 1.$$
$$\cos^2(z', X) + \cos^2(z', Y) + \cos^2(z', Z) = 1.$$

Et les trois équations précédentes (E) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos(x', X) + y' \cos(y', X) + z' \cos(z', X) \\ y = x' \cos(x', Y) + y' \cos(y', Y) + z' \cos(z', Y) \\ z = x' \cos(x', Z) + y' \cos(y', Z) + z' \cos(z', Z), \end{array}\right\} (E')$$

dans lesquelles X, Y, Z, désignent les axes rectangulaires primitifs des x, des y, des z.

Ces formules sont celles par lesquelles on passe d'un systême de coordonnées rectangulaires à un systême de coordonnées obliques.

Lorsque les axes des x', des y', des z', sont perpendiculaires entr'eux, on a de plus les équations de condition :

$$\cos^2(x', X) + \cos^2(y', X) + \cos^2(z', X) = 1.$$
$$\cos^2(x', Y) + \cos^2(y', Y) + \cos^2(z', Y) = 1.$$
$$\cos^2(x', Z) + \cos^2(y', Z) + \cos^2(z', Z) = 1.$$

Dans le cas général, nous avons supposé les nouveaux axes des x', des y', des z', déterminés par les angles que ces axes font avec les plans (xy), (xz), (yz) des coordonnées primitives x, y, z ; s'ils étoient déterminés par les angles qu'ils feroient avec les arêtes de la pyramide formée par ces trois plans, les formules ordinaires de la trigonométrie sphérique donneroient les lignes trigonométriques des neuf angles qu'on a supposés connus dans les équations (E) ou (E'), et on déduiroit des mêmes formules trois équations de condition, entre ces angles et les trois autres angles qui déterminent la position respective des trois axes des x, des y, des z, et qui appartiennent à la pyramide formée par ces trois axes.

Supplément à l'article « des Surfaces du second degré », pages 187 — 203 ; par M. Bourdon.

Dans la discussion des cas particuliers relatifs à la détermination des axes principaux dans les surfaces du second degré, nous n'avons fait aucun usage de l'équation en u, parce qu'elle est très-compliquée. Cependant, pour ne rien laisser à désirer sur cette matière, nous avons cru devoir faire connoître une forme sous laquelle elle est susceptible d'être mise, et qui en rend la discussion assez simple.

Faisons, pour abréger,

$$\begin{aligned} P &= 2\,B'B''\,(A - A') + B\,(B''^2 - B'^2) \\ Q &= 2\,B\,B''\,(A'' - A) + B'\,(B^2 - B''^2) \\ R &= 2\,B\,B'\,(A' - A'') + B''\,(B'^2 - B^2). \end{aligned}$$

Les quantités P, Q, R, sont évidemment liées entr'elles par la relation :

$$PB + QB' + RB'' = 0 \qquad (X).$$

On parvient, après quelques transformations, à l'équation

$$RBu^3 + [2R(A-A') + QB - PB']\,u^2 + [PB'' + 2Q(A-A') - RB]\,u - QB =$$

Cela posé, soit 1° $R = 0$, l'une des valeurs d'u devient infinie. Quant aux deux autres, elles seront données par l'équation

$(QB - PB')\,u^2 + [BP'' + 2\,Q\,(A - A')]\,u - QB = 0$, qui

devient, (à cause de la relation (X), d'où l'on tire $P = -\frac{B'}{B}Q$),

$$u^2 + \frac{2B(A-A') - B'B''}{B^2 + B'^2}\,u - \frac{B^2}{B^2 + B'^2} = 0,$$

équation qui donnera les deux autres valeurs d'u.

On parviendroit à cette même équation, en remontant à

l'équation (11), qui, dans le cas de $R = 0$, peut être mise sous la forme

$$(B'u - Bt)(BB''u + B'B''t + BB') = 0.$$

Le 1er facteur donne $t = \frac{B'}{B}u$;

d'où, en substituant dans l'équation (9),

$$u^2 + \frac{2B(A-A') - B'B''}{B'^2 + B^2}u - \frac{B^2 + B'^2}{B^2} = 0.$$

Le 2e facteur donne $t = -\frac{BB''u + BB'}{B'B''}$;

d'où, substituant dans l'équation (9)

$$[2B'B''(A-A') + B(B''^2 - B'^2)]u = 0,$$

équation qui a pour valeur $u = 0$; d'où l'on déduit

$$t = -\frac{B}{B''}.$$

Mais ce système de valeurs est étranger; car, en le substituant dans l'équation (10), on reconnoît qu'elle n'est pas satisfaite. Ce système étranger provient de la manière dont l'équation (11) a été formée avec les équations (9) et (10).

2°. Soit $Q = 0$, il en résulte

$$u = 0 \ldots\ldots RBu^2 + [2R(A-A') - PB']u + PB'' - RB = 0,$$

ou, à cause de $P = -\frac{B''}{B}R \ldots\ldots,$

$$u^2 + \frac{2B(A-A') + B'B''}{B^2}u - \frac{B^2 + B''^2}{B^2} = 0,$$

équation à laquelle on parviendroit facilement (n° 4), en observant que l'équation (10) peut, dans le cas de $Q = 0$, être mise sous la forme

$$(Bt - B'')(BB''u + B'B''t + BB') = 0.$$

3°. Soit $P=0$, il en résulte

$$2Bu^3+[2R(A-A')+QB]u^2+[2Q(A-A')-RB]u-QB=0,$$

ou, à cause de $Q=-\dfrac{B''}{B'}R$,

$$BB'u^3+[2B'(A-A')-BB'']u^2-[2B''(A-A')+BB']u+BB''=0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$Bu^2(B'u-B'')+2(A-A')u(B'u-B'')-B(B'u-B'')=0;$$

d'où $B'u-B''=0$; et $u^2+\dfrac{2(A-A')}{B}u-1=0.$

Et en effet, d'après la condition $P=0$, l'équation (9) peut (n° 3) se mettre sous la forme

$$(B'u-B'')(BB''u+B'B''t+BB')=0,$$

équation qui est satisfaite en posant $B'u-B''=0$.

4°. Enfin supposons que l'on ait à-la-fois $P=0$; $Q=0$; $R=0$, l'équation en u se réduit à $0=0$, et u reste entièrement indéterminé.

Cette indétermination tient, comme nous l'avons déjà vu, à l'existence d'un facteur commun entre les équations (9), (10) et (11).

GÉOMÉTRIE.

Sur les Polyèdres, par M. Cauchy, *aspirant ingénieur des Ponts et Chaussées.*

Euler a déterminé le premier, dans les Mémoires de Pétersbourg, année 1758, la relation qui existe entre le nombre des différens élémens qui constituent un polyèdre quelconque pris à volonté. Le théorême qui exprime cette relation n'est qu'un cas particulier d'un autre théorême plus général, dont voici l'énoncé :

Théorême.

Si l'on décompose un polyèdre en tant d'autres que l'on voudra, en prenant à volonté dans l'intérieur de nouveaux sommets ; que l'on représente par P le nombre des nouveaux polyèdres ainsi formés, par S le nombre total des sommets, y compris ceux du premier polyèdre, par H le nombre total des faces, et par A le nombre total des arêtes, on aura

$$S+H=A+P+1,$$

c'est-à-dire, que la somme faite du nombre des sommets et de celui des faces surpassera d'une unité la somme faite du nombre des arêtes et de celui des polyèdres.

Démonstration.

Décomposons tous les polyèdres en pyramides triangulaires, en faisant passer par les arêtes ou diagonales des faces de chaque polyèdre et les sommets situés hors de ces faces, des plans diagonaux. Toutes les faces se trouveront décomposées en triangles. Soient m le nombre des plans diagonaux, et n le nombre des diagonales formées par les intersections des plans diagonaux, soit entr'eux, soit avec les anciennes faces, le nombre des faces tant anciennes que nouvelles sera $H+m$; et le nombre des triangles dans lesquels chaque face se trouve partagée étant égal au nombre des diagonales formées sur cette face, augmenté de

l'unité, le nombre total des triangles qui forment les faces des pyramides sera égal au nombre total des diagonales augmenté du nombre total des faces,

ou à $$H + m + n.$$

Le nombre des pyramides sera égal à celui des polyèdres, plus au nombre des plans diagonaux,

ou à $$P + m.$$

Le nombre des arêtes des pyramides sera égal à celui des anciennes arêtes, plus au nombre total des diagonales,

ou à $$A + n.$$

Enfin, le nombre des sommets des pyramides sera toujours égal

à $$S.$$

Supposons maintenant que l'on enlève successivement du polyèdre total les diverses pyramides triangulaires qui le composent, de manière à n'en laisser subsister à la fin qu'une seule, en commençant par celles qui ont des triangles sur la surface extérieure du premier polyèdre, et n'enlevant dans la suite que celles dont une ou plusieurs faces auront été découvertes par des suppressions antérieures. Chaque pyramide que l'on enlevera aura une, deux, ou trois faces découvertes. Soit p' le nombre des pyramides qui ont une face découverte au moment où on les enlève, p'' le nombre des pyramides qui ont alors deux faces découvertes, et p''' le nombre de celles qui ont alors trois faces découvertes. La destruction de chaque pyramide sera suivie, dans le premier cas, de la destruction d'une face; dans le second cas, de la destruction de deux faces et de l'arête commune à ces deux faces; dans le troisième cas, de la destruction d'un sommet, de trois faces, et de trois arêtes. Il suit de là qu'au moment où l'on aura détruit toutes les pyramides, à l'exception d'une seule,

le nombre des sommets détruits sera p''',

celui des pyramides détruites, $p' + p'' + p'''$,

celui des triangles détruits, $p' + 2p'' + 3p'''$,

celui des arêtes détruites, $p'' + 3p'''$.

Le nombre des sommets restans pourra donc être représenté par

$$S - p''' = 4,$$

celui des pyramides restantes, par

$$P + m + n - (p' + p'' + p''') = 1,$$

celui des triangles restans, par

$$H + m + n - (p' + 2p'' + 3p''') = 4,$$

celui des arêtes restantes, par

$$A + n - (p'' + 3p''') = 6.$$

Si l'on ajoute la première équation à la troisième, on aura

$$S + H + m + n - (p' + 2p'' + 4p''') = 8$$

si l'on ajoute la deuxième à la quatrième, on aura

$$A + P + m + n - (p' + 2p'' + 4p''') = 7.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre les deux équations précédentes, on aura

$$S + H - A - P = 1,$$

ou

$$S + H = A + P + 1.$$

Corollaire 1.

Si l'on suppose que tous les sommets intérieurs soient détruits, il n'y aura plus qu'un seul polyèdre. Il faudra faire alors $P = 1$, et l'on aura

$$S + H = A + 2,$$

ce qui est le théorême d'Euler.

Corollaire 2.

Si l'on considère une figure plane composée de plusieurs polygones renfermés dans un contour donné, il faudra faire dans la formule générale $P = o$, et l'on aura alors

$$S + H = A + 1,$$

d'où l'on conclut que la somme faite du nombre des polygones et du nombre des sommets surpasse d'une unité le nombre des droites qui forment les côtés de ces mêmes polygones.

Nota. Dans un Mémoire sur les Polyèdres, imprimé Xe. Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, M. Poinsot a démontré

l'existence de quatre nouveaux Polyèdres réguliers, à angles saillans et rentrans; M. Cauchy a lu à l'Institut un Mémoire dans lequel il considère ces nouveaux Polyèdres comme résultans du prolongement des faces des Polyèdres réguliers à angles saillans, et il démontre que leur nombre se réduit nécessairement à quatre; proposition que M. Poinsot avoit présentée comme difficile à approfondir.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Problême. Etant donnés deux ellipsoïdes de révolution, dont les axes ne sont pas dans le même plan, déterminer leur courbe d'intersection, en n'employant que la ligne droite et le cercle.

Solution, par M. CHAPUY, *élève.*

Nous choisirons pour plans de projections un plan vertical parallèle aux deux axes, et un plan horizontal perpendiculaire à l'un de ces axes; fig. 1 *a*, 1 *b*, pl. 2.

Cela posé, nous remarquerons que si l'un des ellipsoïdes est coupé par un plan donné perpendiculaire au plan vertical, il sera toujours possible de trouver un autre plan aussi perpendiculaire au plan vertical, tel que la section du premier soit projetée sur le second suivant un cercle : si donc on laisse indéterminée l'inclinaison du plan coupant avec l'axe de l'ellipsoïde, ainsi que celle du plan de projection correspondant, on pourra satisfaire à une condition de plus, savoir : que le premier plan coupe encore le second ellipsoïde suivant une section qui se projette en un cercle sur le second plan.

Ces deux plans une fois obtenus, le problême n'offrira plus de difficultés; nous allons donc nous occuper de leur recherche.

Soit d'abord AB, fig. 1 *a*, pl. 2, la trace d'un plan quelconque perpendiculaire au plan vertical et passant par le centre o d'un des ellipsoïdes : la projection de l'intersection sera une ellipse dont les demi axes seront co et Ao; construisant donc le triangle rectangle AOE avec $AE = co$, la projection de Ao sur tout plan parallèle à celui représenté par la trace AE, sera $AE = oc$, et celle de la section sera un cercle.

Il ne s'agit plus maintenant que de trouver dans quel cas les deux triangles correspondans dans les deux ellipses génératrices ont leurs côtés parallèles, car les plans parallèles

donnant des sections semblables, ce que nous aurons trouvé pour les sections passant par les centres, aura également lieu pour les sections parallèles.

Cela se réduit à une simple construction de géométrie plane.

Menons fig. 2 *a*, pl. 2, $C'OD'$ parallèle à CD; sur $C'D'$ construisons une ellipse dont O soit le centre, qui ait même petit axe que l'ellipse (E), et les axes proportionnels aux axes de l'ellipse E'. Soit E un point d'intersection des deux ellipses concentriques. Joignons E,O. Menons $E'O'$ parallèle à EO, et construisons les deux triangles rectangles EOG, $E'O'G'$, de la même manière que précédemment; nous aurons, en appelant B et B' les deux demi-axes,

$$\frac{EO}{E'O'} = \frac{B}{B'} = \frac{EG}{E'G'};$$

donc EOG est semblable à $E'O'G'$, et EG parallèle à $E'G'$; les directions EO, EG, sont par conséquent celles des plans coupans et projetans cherchés.

Le reste de la solution se fera maintenant avec beaucoup de facilité. MN, fig. 2 *b*, étant la trace du nouveau plan de projection, on aura $A'B'$, $C''D''$ pour projections des axes, en remarquant qu'elles doivent être à une même distance de la trace que dans la projection primitive. Maintenant, pour un plan coupant quelconque, tel que HI, on aura en projection deux cercles qui se couperont en général suivant deux points qu'on remettra en projection verticale sur HI, et que l'on aura aussi, si l'on veut, sur la première projection horizontale, en remarquant que pour cette projection, ainsi que pour la projection auxiliaire, les points correspondans sont à égales distances des traces. En continuant toujours de la même manière, on trouvera la courbe d'intersection cherchée.

On menera la tangente à cette courbe comme dans le cas où les deux axes sont dans un même plan.

M. Brianchon, officier d'artillerie, à M. Hachette.

Tolède, 8 avril 1810.

Le hasard m'ayant fait tomber entre les mains une édition latine de l'*Almageste de Ptolémée* (*), j'en ai extrait et traduit le

(*) Almagestum Cl. Ptolemei. *Venetiis*, 1515, in-fol.

passage suivant, qui est relatif à la *Théorie des Transversales*, et qui même en contient le principe fondamental. Comme l'exposition savante de cette nouvelle branche de la géométrie vient de faire époque dans l'histoire des progrès de la science, qui, par là, s'est enrichie d'un nouvel élément, j'ai pensé qu'il seroit curieux de montrer que les anciens Grecs ont connu les premiers linéamens de cette théorie, dont ils faisoient usage pour résoudre quelques problêmes astronomiques.

Almageste. — Livre Ier, chap. 12.

PREMIER THÉORÊME. Fig. 3, pl. 2.

« Entre deux lignes droites *AB* et *AG* soient tirées deux autres » droites *BE* et *GD* qui se coupent mutuellement au point *Z* : » je dis que *GE* est à *EA* en raison composée du rapport de » *GZ* à *ZD*, et du rapport de *DB* à *BA*. »

Pour le démontrer, je mène par le point *A* la ligne *AI* parallèle à *EB*, et je prolonge ces deux lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *I*.

Puisque les droites *AI*, *EZ*, sont équidistantes, *GE* est à *EA* comme *GZ* est à *ZI*.

Mais, en multipliant par *ZD* les deux derniers termes de cette proportion, on peut considérer le rapport des lignes *GE*, *EA*, comme se composant du produit des rapports *GZ* à *ZD*, et *DZ* à *ZI*.

Or, *DZ* est à *ZI* comme *DB* est à *BA*, par suite de ce que les droites *AI* et *BZ* sont parallèles.

Donc enfin *GE* est à *EA* en raison composée des rapports *GZ* à *ZD*, et *DB* à *BA*. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce théorême peut se traduire par cette équation :

$$GZ \times ZD \times BA = EA \times GZ \times DB,$$

laquelle fournit cet autre énoncé :

« *Si dans le plan d'un triangle rectiligne quelconque, ADG, » on mène arbitrairement une droite indéfinie, BE, qui ren» contre tous les côtés, prolongés s'il le faut : cette transver» sale déterminera deux segmens sur chaque côté ; et, des six » segmens résultans, le produit de trois d'entr'eux, GE, ZD, » BA, est égal au produit des trois autres, EA, GZ, DB, en*

» *les prenant de manière qu'il n'en entre pas deux dans un » même produit, qui ayent une extrémité commune.* » [Géométrie de position, de M. Carnot.]

LEMME. Fig. 4 *a*, 4 *b*.

« Soient *A*, *B*, *G*, trois points pris à volonté sur la circonfé» rence d'un cercle dont le centre est *D* : si l'on nomme *E* le » point de rencontre de la corde *AG* et du rayon *DB*, pro» longés s'il est nécessaire, on aura : *AE* est à *EG* comme la » soutendante du double de l'arc *AB* est à la soutendante du » double de l'arc *BG*. »

[*La soutendante d'un arc étant double du sinus de la moitié de ce même arc, la proportion précédente peut s'écrire ainsi :*

« *AE* : *EG* : : sin . *AB* : sin . *BG*. »]

DEUXIÈME THÉORÊME. Fig. 5.

« Soient décrits sur la surface d'une sphère quatre arcs de » grands cercles, *AB*, *AG*, *BE*, *GD*, dont les deux derniers se cou» pent mutuellement en *Z*, et sont compris entre les deux autres. » Je dis que la soutendante d'un arc double de *GE* est à la sou» tendante d'un arc double de *EA*, en raison composée du » rapport de la soutendante du double de *GZ* à la soutendante » du double de *ZD*, et du rapport de la soutendante du double » de *DB* à la soutendante du double de *BA*. »

En effet, nommons *I* le centre de la sphère, et de ce centre aux points de section de l'arc *BZE* menons *IB*, *IZ* et *IE*, puis tirons la droite *AD* qui concourt au point *T* avec *IB*; de la même manière, conduisons les droites *DG* et *AG* qui coupent respectivement les lignes *IZ*, *IE*, aux points *K* et *L*.

Il suit de cette construction, que les trois points *T*, *K*, *L*, sont en ligne droite, puisqu'ils sont, d'une part, dans le plan de l'arc *BZE*, et, de l'autre, dans le plan du triangle rectiligne *AGD*.

Traçons donc la droite *TKL*, et considérons le système des quatre lignes *TA*, *GA*, *TL*, *GD*. Les deux dernières se croisent en *K*, et sont comprises entre les deux autres; ainsi, (1[er]. théo-

rème), le rapport de la droite *GL* à la droite *LA* est composé du produit du rapport de la droite *GK* à la droite *KD* par celui de la droite *DT* à la droite *TA*.

Or (d'après le lemme), *GL* est à *LA* comme la soutendante du double de l'arc *GE* est à la soutendante du double de l'arc *EA*.

De même, *GK* est à *KD* comme la soutendante du double de l'arc *GZ* est à la soutendante du double de *ZD*.

Et, enfin, *DT* est à *TA* comme la soutendante du double de l'arc *BD* est à la soutendante du double de *BA*.

Donc, la soutendante du double de l'arc *GE* est à la soutendante du double de *EA*, en raison composée du rapport de la soutendante du double de *GZ* à la soutendante du double de *ZD*, et du rapport de la soutendante du double de *DB* à la soutendante du double de *BA*. Ce qu'il s'agissoit de démontrer.

En substituant dans cette proportion les sinus des arcs simples aux soutendantes des arcs doubles, et égalant le produit des termes extrêmes au produit des termes moyens, on a

$$\sin GE \times \sin ZD \times \sin BA = \sin EA \times \sin GZ \times \sin DB,$$

c'est-à-dire que :

« *Si sur la surface d'une sphère on trace arbitrairement » quatre arcs de grands cercles (AD, AG, GD, BE), et » que l'on considère les trois premiers comme formant un » triangle sphérique (ADG), dont tous les côtés, prolongés, » s'il le faut, sont coupés par le quatrième (BE), cet arc » transversal déterminera deux segmens sur chaque côté ; et, » des six segmens résultans, le produit des sinus de trois » d'entr'eux (GE, ZD, BA) est égal au produit des sinus » des trois autres (EA, GZ, DB), en les prenant de manière que dans un même produit il n'entre pas deux sinus » qui appartiennent à des arcs qui aient une extrémité commune.* » Géom. de position.

Du Parallélipipède, par M. Hachette. Fig. 1, pl. 3.

Soit (fig. 1) *A B C D A' B' C' D'* un parallélipipède oblique, terminé par six parallélogrammes obliques. Après avoir mené les diagonales de chaque parallélogramme, on a douze

diagonales qui sont les arêtes de deux pyramides triangulaires *symétriques*, que M. Monge a nommées (page 441 du 1er. vol. de la Correspondance) *Pyramides conjuguées*. Il y a une telle relation entre le parallélipipède et chacune de ces pyramides, que l'un de ces solides étant donné, l'autre est déterminé. En effet des six arêtes d'une pyramide triangulaire, une quelconque est coupée par quatre autres qui lui sont *adjacentes*, et n'a aucun point de commun avec la sixième arête ; nommant, comme M. Monge, arêtes *opposées* d'une pyramide triangulaire, celles qui ne se coupent pas, et menant par deux arêtes opposées des plans parallèles, les trois couples d'arêtes opposées détermineront six plans qui comprendront entr'eux le parallélipipède circonscrit à l'une ou l'autre des pyramides conjuguées. Les six diagonales qui sont les arêtes d'une même pyramide conjuguée, concourent trois à trois au sommet d'un des angles solides du parallélipipède circonscrit. D'après cette définition, $AB'CD'$ et $A'BC'D$ sont les deux pyramides conjuguées, inscrites au parallélipipède $A\,B\,C\,D\,A'\,B'\,C'\,D'$. Les sommets *opposés* de ces pyramides sont situés sur une même diagonale du parallélipipède, et sont marqués de la même lettre accentuée pour l'un, et sans accent pour l'autre ; A et A', B et B', etc., sont des sommets opposés. Les bases des deux pyramides qui correspondent aux sommets opposés, tels que A et A', sont deux triangles $B'CD'$, $BC'D$, situés dans des plans parallèles entr'eux ; chacun de ces plans coupe les arêtes de la pyramide dont il ne contient pas la base en parties égales : ainsi le plan de la base $B'CD'$ de la pyramide $AB'CD'$, divise les arêtes de la pyramide $A'\,B\,C'\,D$ en parties égales aux points G, H, L ; de même le plan de la base $BC'D$ de la pyramide $A'B\,C'D$ divise les arêtes de la pyramide $AB'CD'$ en parties égales aux points G', H', L'.

D'où il suit que les petites pyramides qui ont pour bases les triangles GHL et $G'H'L'$, et pour sommets les points A' et A, sont semblables aux pyramides entières $A'BC'D$, $AB'CD'$; et le rapport de leurs volumes est évidemment celui de 1 à $(2)^3$, ou de 1 à 8.

Pour déterminer le rapport des volumes des parallélipipèdes et des pyramides conjuguées, on remarquera que les bases $B'CD'$, et $BC'D$ de ces pyramides sont chacune divisées en quatre triangles égaux, qui sont pour l'une GHL, GLB', GHC, HLD' ; et pour l'autre $G'H'L'$, $G'L'B$, $G'H'C'$, $H'L'D$; d'ou il suit que la pyramide $A'\,GHL$ est le quart de la pyramide $A'B'CD'$ ou $CA'B'D'$; or, cette dernière pyramide est le sixième du parallélipipède comme ayant une hauteur

égale et une base moitié; donc la pyramide $A'GHL$ est la 24e. partie du parallélipipède; mais elle n'est que la 8e. partie de la pyramide conjuguée : donc le volume de la pyramide conjuguée est les $\frac{8}{24}$ ou le tiers du parallélipipède.

L'une des pyramides conjuguées étant coupée par les quatre plans qui comprennent l'autre pyramide suivant quatre triangles, il s'ensuit que ces deux pyramides se pénètrent et se coupent suivant huit triangles, et que leur noyau commun est un octaèdre qui a pour faces ces triangles; en sorte que le système des deux pyramides conjuguées est composé de ce noyau et de huit petites pyramides qui ont pour bases les faces de l'octaèdre : or, on a vu que chacune de ces pyramides est la 24e. partie du parallélipipède, et que chaque pyramide conjuguée est le tiers du parallélipipède; donc le noyau est le 6e. de ce parallélipipède. Les huit petites pyramides qui ont pour bases les faces de ce noyau valent les $\frac{2}{6}$ du parallélipipède; donc la partie de ce solide qui n'est pas remplie par le noyau et par les huit petites pyramides, est la moitié du parallélipipède. Cette partie est composée de douze pyramides équivalentes entr'elles, et de même volume que l'une quelconque des petites pyramides, qui ont pour bases les faces du noyau octaèdre. Chacune de ces douze pyramides a pour arêtes un côté d'une face du parallélipipède, et les deux demi-diagonales de cette face.

Ces pyramides correspondent aux arêtes du parallélipipède, dans l'ordre suivant :

Arêtes du parallélipipède.	*Pyramides correspondantes aux arêtes du parallélipipède.*
$A'B'$, $A'C$, $A'D'$	$A'B'GH$, $A'CGH$, $A'D'HL$;
AB, AC', AD,	$ABG'L'$, $AC'G'H'$, $ADH'L'$;
$C'A$, $C'B'$, $C'D'$,	$C'AG'H'$, $C'B'LH'$, $C'D'G'L$;
CA', CB, CD,	$CA'GH$, $CBHL'$, $CDGL'$.

SUR LA PYRAMIDE TRIANGULAIRE;

Par M. MONGE. Fig. 2, pl. 3; Fig. 1, pl. 4.

Dans tout triangle rectiligne,
Le centre du cercle circonscrit,
Le centre de gravité,
Et le point d'intersection des perpendiculaires abaissées du sommet de chacun des angles sur le côté opposé,
Sont toujours en ligne droite; et la distance des deux derniers de ces points est double de celle des deux premiers.

La proposition analogue a lieu pour la pyramide triangulaire; mais son énoncé n'est pas aussi simple.

Dans toute pyramide triangulaire, si par le milieu de chacune des six arêtes on mène

1°. Un plan qui soit perpendiculaire à cette arête, on aura six plans qui passeront par le centre de la sphère circonscrite;

2°. Un plan qui passe par l'arête *opposée* (pag. 261), on aura six plans qui passeront par le centre de gravité;

3°. Un plan perpendiculaire à l'arête opposée, on aura six autres plans qui passeront par un certain même point; ce qu'il faudra démontrer.

Cela posé, les trois points, déterminés ainsi qu'on vient de le dire, sont toujours en ligne droite; et le second est à égales distances des deux autres.

Démontrons d'abord que les plans menés par le milieu des arêtes perpendiculairement aux arêtes opposées, passent tous six par un même point.

Soit projetée la pyramide sur le plan de sa base ABC, fig. 2, pl. 3, considéré comme horizontal; soit D la projection du sommet; les droites AD, BD, CD seront les projections des trois arêtes contiguës au sommet. Si l'on divise ces droites en parties égales aux points respectifs a, b, c, et si l'on joint leurs milieux par des droites, on aura le triangle abc, dont tous les côtés seront respectivement parallèles aux côtés de la base ABC. Cela posé, si par chacun des milieux a, b, c, des arêtes DA, DB, DC, on mène un plan perpendiculaire à l'arête opposée, qui est un des côtés de la base, ce plan sera vertical, et sa projection sera une droite perpendiculaire à ce côté; donc les projections de ces trois plans seront les perpendiculaires abaissées des points

a, *b*, *c*, sur les côtés de la base, ou sur les côtés du triangle *a b c* : or, ces perpendiculaires se couperont toutes trois en un certain point *M*; donc les trois plans menés par les milieux des arêtes contiguës au sommet, perpendiculairement aux arêtes opposées, passent par la verticale élevée par le point *M*.

Actuellement concevons que la pyramide tourne autour d'un des côtés de sa base, par exemple autour de *AC*, jusqu'à ce que la face adjacente *A C D* s'applique à son tour sur le plan horizontal en *ACD*, et devienne une nouvelle base; dans ce mouvement, chaque point de la pyramide décrira un arc de cercle, dont le plan sera vertical et perpendiculaire à *AC*; donc, si l'on fait la projection de la pyramide considérée dans cette seconde position, le point *D'* de la nouvelle base sera dans la perpendiculaire abaissée du point *D* sur *A C*; et la projection *B'* du nouveau sommet sera dans la perpendiculaire abaissée du point *B*. Soient menées les projections *A B'*, *CB'* et *D' B'* des arêtes contiguës au nouveau sommet, et soient partagées les projections chacune en deux parties égales aux points respectifs *e*, *f*, *b'*, il est clair que *B D* et *B' D'* seront les projections de la même arête, et que leurs milieux *b* et *b'* seront les projections d'un même point; ainsi la droite *b b'* sera perpendiculaire à la charnière *A C*.

Après avoir joint les trois points *e*, *f*, *b'* pour former le triangle *e f b'* qui sera semblable à la seconde base *A C D'*, et en raisonnant pour cette seconde projection comme nous avons fait pour la première, il est clair que les trois plans menés par les points *e*, *f*, *b'* perpendiculairement aux arêtes opposées respectives, c'est-à-dire aux trois côtés de la seconde base, seront verticaux, et qu'on aura leurs projections en abaissant de chacun des sommets du triangle *e f b'* une perpendiculaire sur le côté opposé. Or, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point *N*; donc les trois plans verticaux passent tous par la verticale élevée au point *N*; de plus, la droite *b b'* étant perpendiculaire sur *A C*, le point *N*, ainsi que le point *M* se trouve sur cette droite; donc les verticales élevées par les points *M* et *N* sont dans un même plan perpendiculaire à la charnière. Si donc on conçoit que la pyramide retourne à sa position primitive en tournant encore autour de la droite *AC* comme charnière, et en entraînant les trois plans que nous venons de mener, et la droite de leur intersection commune, cette dernière droite ne sortira pas du plan vertical perpendiculaire à la charnière; elle ne cessera donc pas de couper la verticale fixe élevée au point *M*, et elle la coupera encore, lorsque la pyramide sera revenue à sa position primitive. Le point d'intersection de ces deux droites sera donc commun aux plans menés par les milieux

re quel-

gravité

$a' b' c'$

demon

pyramide ... it au

vecteurs de ... e de

Soient.

dans ... le poly-

comme ... e de gravité

que la ... pondantes aux

Cela

de l'arête

centre de

en une

Ces trois plans

base

centre de grav ... du polygone

longées jusqu'au

les côtés d'un ... $cd. \cos a + \ldots$

le sommet ... $a' b' c'$, etc.

un des côtés

$- p . a' b \ldots + \ldots$

égales. Donc le triangle $A'B'C'$ sera égal et semblable à la base ABC, et renversé par rapport à elle ; donc ces deux triangles sont des sections faites dans une même pyramide par des plans parallèles entr'eux et placés à égales distances de part et d'autre du sommet. Donc, enfin, les deux pyramides qui ont leur sommet commun au centre de gravité, et qui ont pour bases, l'une le triangle ABC, l'autre le triangle $A'B'C'$, sont opposées au sommet, semblables et parfaitement égales entre elles.

Actuellement, si par chacun des points a, b, c, on mène un plan perpendiculaire à l'arête dont ce point est le milieu, on aura trois plans qui se couperont dans le centre de la sphère circonscrite, et qui formeront une pyramide qui sera placée d'une manière déterminée par rapport à la pyramide qui a son sommet au centre de gravité et dont la base est $A'B'C'$. De même, si par les milieux a', b', c' des trois côtés de la base ABC, on mène des plans perpendiculaires aux arêtes opposées, ces trois plans seront placés par rapport à la pyramide dont le sommet est au centre et dont la base est ABC, de la même manière que les trois plans qui donnent le centre de la sphère circonscrite, le sont par rapport à la pyramide opposée au sommet. Ces plans formeront donc une pyramide dont le sommet sera placé dans la pyramide inférieure au centre de gravité, comme le centre de la sphère circonscrite est placé dans celle qui est supérieure au centre de gravité. Donc les sommets de ces deux pyramides sont semblablement placés dans les pyramides opposées, et par conséquent sont sur une droite qui passe par le centre de gravité. Enfin, comme les pyramides opposées sont égales entr'elles, il s'ensuit que les deux sommets sont à égales distances du centre de gravité. Mais le dernier sommet n'est autre chose que le troisième point dont il s'agit dans l'énoncé. Donc...., etc.

Tout ce qui précède peut être singulièrement réduit. Car si on mène les droites $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$ qui se rencontrent en un point D', on formera la pyramide conjuguée (voyez page 441, 1er. vol. de la Correspondance) $A'B'C'D'$, qui aura même centre de gravité que $ABCD$, et le troisième point que nous avons déterminé ne sera autre chose que le centre de la sphère circonscrite à la pyramide conjuguée. La proposition dont il s'agit se réduit donc à ceci. *Etant donnée une pyramide triangulaire quelconque, si l'on considère en même temps la pyramide conjuguée qui aura nécessairement le même centre de gravité, les sphères circonscrites aux deux pyramides auront des rayons égaux, et leurs centres seront en ligne droite avec le centre de gravité, et à égales distances de part et d'autre.*

Propriétés des centres de gravité.

Par M. BLONDAT, *élève*.

Soit abc, fig. 2, pl. 4, un triangle situé d'une manière quelconque, par rapport à un plan $a'b'c'd'$ ... ou (x, y).

On sait que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de son aire est donnée par l'équation

$$p = \frac{aa' + bb' + cc'}{3}.$$

On sait aussi que le volume du prisme triangulaire $abca'b'c'$ est donné par l'équation

$$V = \left(\frac{aa' + bb' + cc'}{3}\right) a'b'c';$$

donc $\quad V = a'b'c'.p,$

en sorte que le volume du prisme $abca'b'c'$ est équivalent au produit de sa base par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de sa face supérieure.

Conclusions.

1°. Ce théorême est général et a lieu, quel que soit le polygone supérieur, pourvu qu'il soit plan.

En effet, la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité étant P, et p, p', p''.... étant celles correspondantes aux triangles abc, acd,....

On a l'équation :

$$P(abc + acd + \ldots) = p.abc + p'acd + \ldots\ldots$$

la multipliant par $\cos a$, [a étant l'angle du plan du polygone supérieur avec le plan (x, y)], elle devient

$$P(abc.\cos a + acd.\cos a + \ldots) = p.abc.\cos a + p'.acd.\cos a + \ldots$$

ou en remplaçant $abc.\cos a$ par la projection $a'b'c'$, etc., il en résulte

$$P(a'b'c' + a'c'd' + \ldots) = p.a'b'c' + p'a'c'd' + \ldots$$

Or, $p \cdot a'b'c'$ est, d'après la remarque précédente, le volume du prisme $abc\,a'b'c'$, ainsi des autres ; donc le volume du prisme total $= P\,(a'b'c'd'e'\ldots) =$ la base du prisme par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du polygone supérieur.

2°. Ce théorême ayant lieu, quel que soit le nombre des côtés du polygone, a encore lieu lorsque ce polygone dégénère en courbe.

3°. Ces remarques ne fournissent, à la vérité, une expression du volume des cylindres, qu'autant que leur base est perpendiculaire à leurs arêtes ; mais on peut aussi en déduire une expression fort simple, lorsque cette base est inclinée d'une manière quelconque.

Je démontrerai d'abord que si l'on fait une suite de sections dans un cylindre, ces sections faisant entre elles des angles quelconques, leurs centres de gravité se trouvent sur une même ligne droite.

Fig. (15). Considérons un prisme quelconque (car il suffit de démontrer cette propriété pour les prismes).

Prenons pour plan (x, y) un plan qui lui soit perpendiculaire. Soit $(a'b'c'd'e'\ldots.)$ sa section par ce plan ; la distance du centre de gravité au plan (y, z) sera donnée par l'équation

$$x = \frac{(a'b'c')\;x' + a'c'd' \cdot x'' + \ldots.}{a'b'c' \quad + a'c'd' \quad + \ldots.}.$$

La distance du centre de gravité de la section $abcde\ldots.$ au même plan, sera donnée par

$$X = \frac{abc\;X' + acd\,X'' + \ldots.}{abc \quad + acd \quad + \ldots.};$$

Or, $x' = X'$, car la distance des centres des triangles $a'b'c'$, abc au plan des (y, z) est évidemment la même. On voit de même que $x'' = X''\ldots.$

de plus $\cos a \cdot abc = a'b'c'$

$\cos a \cdot acd = a'c'd'$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

a étant l'angle du plan du polygone supérieur avec le plan (x,y), donc

$$X = \frac{abc\,X' + acd\,X'' + \ldots}{abc + acd + \ldots} = \frac{\frac{a'b'c'}{\cos a}.x' + \frac{a'c'd'}{\cos a}x'' + \ldots}{\frac{a'b'c'}{\cos a} + \frac{a'c'd'}{\cos a} + \ldots} = x.$$

Donc les distances des centres de gravité des deux sections au plan (y, z) sont égales ; donc ces centres se trouvent dans un même plan parallèle au plan (y, z). On démontreroit de la même manière qu'ils sont aussi dans un même plan parallèle au plan des (x, z).

Ces deux centres se trouvent donc dans une même ligne parallèle à l'axe des z.

Revenons maintenant à nos cylindres.

Soient A et B les deux sections d'un cylindre, ou autrement ses deux faces; soit C la section par un plan perpendiculaire à ses arêtes.

On voit bien évidemment, d'après ce que j'ai démontré, que la ligne qui joint le centre de gravité A, et celui de B, étant représentée par l, l'expression du volume du cylindre sera

$$V = l.C, \quad \text{ou} = l.A.\cos a, \quad \text{ou} = l.B.\cos b,$$

puisque $C = A\cos a = B.\cos b$, a et b étant les angles du plan de A et de B avec celui de C.

4°. Soient PCQ, PBQ, fig. 3, pl. 4, deux courbes égales, dont les centres de gravité soient B' et C', et dont les plans qui se coupent suivant PQ, forment un angle $BAC = \alpha$.

Le volume compris entre ces faces, et la surface cylindrique $PBCQ$, engendrée par une ligne de direction perpendiculaire à PQ, qui glisseroit sur les deux courbes, sera

$$V = PBQ.\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).B'C' = PBQ\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).2AC'.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

puisque $B'\ C'\ A$ étant un triangle isocèle,

$$B'C' = 2.AC'.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

ou en faisant $AC' = r$, $PBQ = S$, $V = S.r.\sin\alpha$.

5°. Maintenant considérons la surface dont les sections, par une suite de plans parallèles, présentent des polygones réguliers semblables, ayant leurs côtés parallèles et leurs centres sur une même droite perpendiculaire aux plans sécans; les surfaces de révolution en sont des cas particuliers. Leur volume se composant d'un nombre de solides semblables à ceux que nous venons d'examiner (4°), égal au nombre des côtés du polygone, on a

$$V = m \, . \, r \, . \sin \alpha \, . \, S,$$

(m étant le nombre des côtés du polygone,)

ou puisque $m = \frac{2\pi}{\alpha}$, 2π étant la circonférence dont le rayon est 1,

$$V = 2\pi r \, . \, S \, . \, \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

6°. Si la surface est de révolution, le nombre des côtés est infini; l'angle α est égal à zéro, et la formule $V = 2 . \pi . r . S . \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ devient

$$V = 2 \, . \, \pi \, . \, r \, . \, S;$$

ce qui démontre le théorême de *Guldin* d'une manière directe.

7°. Si le plan d'une courbe se meut normalement à une courbe quelconque, le volume engendré par l'aire de cette courbe a pour expression

$$V = A \, . \, S,$$

(A étant l'aire de la courbe mobile, S étant la courbe décrite par le centre de gravité de cette aire).

En effet, le volume compris entre deux positions voisines de l'aire de la courbe mobile peut être considéré comme celui d'un cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de cette aire.

La somme des élémens successifs du volume, ou le volume lui-même, est donc

$$A \, (l + l' + l'' + \ldots\ldots),$$

l étant la ligne qui joint les centres de gravité de deux positions voisines de l'aire mobile; l' étant ...... Or $l + l' + l'' + \ldots\ldots$ forment la courbe décrite par le centre de gravité; donc, etc.

Ce théorême comprend aussi les surfaces de révolution, puisqu'elles sont engendrées par une courbe dont le plan se meut normalement à un cercle.

Problèmes de Géométrie (*).

1°. Mener un cercle tangent à trois cercles donnés?

2°. Par un point donné dans le plan d'un parallélogramme, mener avec la règle un parallèle à une droite située dans ce plan?

Le premier problême peut se ramener à celui-ci : Mener par un point un cercle tangent à deux cercles donnés, en diminuant ou augmentant le rayon du cercle cherché du rayon du plus petit des trois cercles, suivant qu'il doit toucher ce dernier cercle extérieurement ou intérieurement, ce qui revient à augmenter ou diminuer également les rayons des deux autres cercles d'après la nature de leur point de contact.

Je vais d'abord démontrer la proposition suivante sur laquelle se fonde la solution du problême dont il est question : Si par le point O, fig. 4, pl. 4, où se coupent les tangentes extérieures communes aux cercles X et Y, et par le point A où doit passer le cercle tangent à ces deux cercles, on mène une droite AO, que l'on fasse passer ensuite par le point O une sécante quelconque OT, qui vient couper les cercles X et Y intérieurement en T et T'; qu'enfin par ces deux points T et T' et par le point A on fasse passer un cercle, cette circonférence de cercle coupera AO en un point B qui sera le même, quelle que soit la sécante OT.

En effet, OB et OT étant les sécantes d'un même cercle ABT, on a :

$$AO \times OB = OT \times OT'.$$

Mais si l'on mène une nouvelle sécante Ot, on a aussi (voyez la page 20 du 1er vol. de la Correspondance),

$$OT \times OT' = Ot \times Ot';$$

donc

$$AO \times OB = Ot \times Ot' \qquad (1).$$

Il est évident, d'après cette dernière équation (1), que les quatre points T, T', A et B sont placés sur une même circonférence de cercle.

(*) Les solutions des deux problêmes suivans m'ont été communiquées par M. Poncelet, admis cette année dans le génie militaire.

H. C.

Il est démontré aussi dans l'article cité, que tout cercle tangent aux cercles X et Y, a ses deux points de contact placés sur une droite qui passe par le point O, dans les deux cas où il laisse entièrement hors de sa circonférence, ou qu'il renferme à-la-fois les deux cercles X et Y. Il suit de là et de ce que j'ai démontré plus haut, que le cercle tangent aux cercles X et Y, et qui passe par le point A, passe aussi par le point B. Ainsi le problême dont il s'agit se trouve ramené à celui-ci : Par deux points A et B, mener un cercle qui touche le cercle X ou Y.

Comme ce dernier problême est susceptible de deux solutions, il est bon de faire voir que celle qui correspond au cas où le cercle est touché extérieurement, appartient aussi au cercle qui, passant par le point A, toucheroit extérieurement les cercles X et Y.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que tout cercle passant par le point A et par deux points p et p', où une sécante quelconque Ot vient couper extérieurement les cercles X et Y, passera aussi par le même point B; car alors le cercle qui passe par le point A, et qui touche extérieurement les cercles X et Y, ayant ses points de contact dans la direction du point O, passera évidemment par les points A et B. Or, on voit sans peine (*) que $OT \times OT' = Op \times Op'$; donc, d'après l'équation (1),

$$Op \times Op' = AO \times OB.$$

Cette équation prouve que les points A, B, p, p', sont placés sur la même circonférence de cercle.

Voici maintenant comment on achevera la solution du problême : Ayant tracé le cercle ATT', ainsi que je l'ai dit, on menera la corde lT qui coupera AO en un point P. Par ce point on menera les tangentes Pm, Pm', au cercle X; et les points m et m' de contact seront les points de tangence des cercles cherchés, dont l'un touche intérieurement, et l'autre extérieurement, le cercle X. En effet, on a

$$Pm^2 = Pl \times PT;$$

or

$$Pl \times PT = PB \times PA;$$

donc

$$Pm^2 = PB \times PA.$$

Cette dernière équation prouve évidemment que le cercle qui

(*) Il suffit de comparer chacun des produits $OT \times OT'$, $Op \times Op'$, au produit qu'on obtiendroit pour la tangente commune aux cercles X et Y.

passeroit par les trois points A, B et m, seroit touché par la droite Pm en m. On conclut aussi de la même équation, Pm' étant égal à Pm, que le cercle ABm', touche le cercle X en m'.

En considérant le point O', où se croisent les tangentes intérieures, communes aux cercles X et Y, on obtiendroit, par une construction semblable, deux autres solutions du problême de mener par un point un cercle tangent à deux cercles donnés. On peut voir facilement, en examinant les différentes circonstances du contact, que ce dernier problême est susceptible de quatre solutions, et que par conséquent il se trouve entièrement résolu par ce que j'ai dit.

Voici une proposition analogue à celle que j'ai démontrée précédemment, et qui donne une solution simple du problême de mener une sphère tangente à quatre sphères données.

Si par la droite qui joint les sommets des trois cônes circonscrits deux à deux à trois sphères, et par un point donné, on mène un plan P; qu'ensuite par la même droite on mène un plan qui coupe les sphères; que par le cercle tangent aux cercles d'intersection et par le point donné, on fasse passer la surface d'une sphère, cette surface coupera le plan P suivant un cercle qui restera le même, quelle que soit la section qu'on ait faite dans les sphères. On voit aisément que la sphère qui passe par le point donné, et qui est tangente aux trois sphères dont il s'agit, devra passer aussi par ce cercle; car cette sphère doit avoir ses points de contact placés sur un plan qui passe par la droite qui joint les trois sommets des cônes.

Solution du second problême (voyez n°. 8 du 1er volume de la Correspondance, pag. 305.)

« Par un point A, fig. 5, pl. 5, donné dans le plan d'un parallélogramme $BCDE$, mener avec la règle une parallèle à la droite MN située dans ce plan. »

Prolongez les côtés BE et DE jusqu'à leur rencontre avec MN; par ces points de rencontre et par un point quelconque K de la diagonale EC, menez les droites KG et KH qui viennent couper les deux autres côtés du parallélogramme respectivement en G et en H; menez la droite GH qui sera parallèle à MN. On achevera ensuite la solution, d'après ce qui a été dit dans le n°. 8 du premier volume de la Correspondance, où il s'agissoit de mener par un point donné une droite qui allât concourir avec deux droites données, sans employer le compas;

car la solution convient aussi au cas où les deux droites sont parallèles, comme le sont les droites MN et GH.

Il resteroit à démontrer ce qui est supposé dans cette solution, savoir, que GH est parallèle à MN. Pour cela j'observe que le triangle MEK étant semblable au triangle CKH, et le triangle EKI au triangle CKG, on a la proportion

$$GC : CH :: EI : ME.$$

De plus, les angles MEI, GCH, sont égaux; donc les triangles MEI et GCH sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels, et la droite GH est parallèle à MN. C. Q. F. D.

Sur le point brillant d'une surface de révolution.

M. Delavenne (élève admis cette année dans l'artillerie) m'a remis une note sur la détermination du point brillant d'une surface de révolution. Il propose une modification à la solution que j'ai donnée page 303 du 1er volume de la Correspondance. Il suppose qu'on ait construit sur la surface de révolution la ligne qui est le lieu des pieds des perpendiculaires à cette surface, abaissées de tous les points de la droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur. Les rayons de lumière réfléchis de tous les points de cette ligne courbe étant projetés sur un des plans de projection, M. Delavenne construit une courbe tangente à ces rayons de lumière projetés; et, par la projection de l'œil sur le même plan, il mène une tangente à cette dernière courbe: cette tangente prolongée coupe la ligne des pieds des normales en un point qui est le point brillant demandé.

Quoique cette construction ne soit pas rigoureuse, puisqu'il faut mener une tangente à une courbe du genre des caustiques par un point donné hors de cette courbe, en faisant tourner une règle autour de ce point jusqu'à ce qu'elle touche la courbe; cependant elle est suffisante pour la pratique, parce qu'elle donne la position de la tangente et le point où cette tangente coupe une courbe connue, sans qu'on soit obligé de considérer le point où elle touche la caustique des rayons réfléchis.

Dans une seconde note, M. Delavenne détermine par une autre considération le point brillant d'une surface de révolution, dans l'hypothèse d'un point lumineux. Il conçoit par le point brillant la normale à la surface, et les rayons incident, réfléchi,

qui correspondent à ce point; il considère ensuite le triangle formé par la portion de normale comprise entre la surface et l'axe de révolution, par le rayon réfléchi et par une parallèle au rayon incident mené par le point où la normale rencontre l'axe de révolution. Ce triangle est isocèle, puisque les rayons incident et réfléchi font avec la normale des angles égaux. Dans tout autre plan normal à la surface, la portion de normale comprise entre la surface et l'axe de révolution, la droite menée vers l'œil par le point où la normale coupe la surface, la parallèle au rayon lumineux qui tombe en ce même point, forment un triangle qui n'est pas isocèle. Donc, si l'on porte le côté de ce triangle, qui est sur la parallèle au rayon incident, sur la direction du rayon réfléchi, on obtiendra sur ce rayon le point d'une courbe, dont l'intersection avec une autre ligne déjà connue (le *lieu* des pieds des perpendiculaires abaissées sur la surface de révolution par la droite qui joint le point lumineux et l'œil) détermine le point brillant de la surface de révolution. H. C.

MÉCANIQUE.

Un ancien Elève, Directeur des Douanes à Fuligno, département de Trasimène (M. Dubois-Aymé), se promenoit sur le bord de la mer; il aperçut à quelque distance une personne de sa connoissance, et se mit à courir pour l'atteindre; son chien qui s'étoit écarté, courut vers lui en décrivant une courbe dont l'empreinte resta sur le sable. M. Dubois revenant sur ses pas, fut frappé de la régularité de cette courbe, et il en chercha l'équation, en supposant 1°. que le chien se dirigeoit toujours vers le lieu que le maître venoit de quitter; 2°. que le maître parcouroit une ligne droite; 3°. que les vîtesses du maître et du chien étoient uniformes.

Prenant pour axe des y le chemin du maître, et pour axe des x la perpendiculaire abaissée du point de départ du chien sur l'axe des y, on trouve pour l'équation de la courbe,

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{n}{n-1} \cot\left(\tfrac{1}{2}\phi\right) a^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{n-1}{n}} - a^{\frac{n-1}{n}} \right) \\ - \frac{n}{n+1} \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right) a^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{n+1}{n}} - a^{\frac{n+1}{n}} \right) \end{aligned}\right\}.$$

dans laquelle n est le rapport des vîtesses du chien et de son

maître, φ l'angle de l'axe des y avec la droite qui réunit les points de départ du maître et du chien.

Cetté courbe jouit de la propriété que les rayons de courbure sont proportionnels aux abscisses des points par lesquels on mène ces rayons.

ALGÈBRE.

Résolution de deux Equations à deux inconnues ; par M. Lefebure, *Répétiteur-Adjoint à l'Ecole Polytechnique.*

L'élimination, considérée sous le point de vue le plus général, offre des difficultés au-dessus de la puissance actuelle de l'algèbre. Mais il y a des cas fort étendus, pour lesquels on a une solution complette. L'on doit sur-tout remarquer celui des équations *algébriques*, où les inconnues ne sont liées que par les quatre premières opérations. De toutes les méthodes employées dans ce cas, celle des fonctions symétriques est la seule qui donne toutes les solutions de la question sans complication de racines étrangères. Celle qui emploie la marche du plus grand commun diviseur, et que l'on donne dans les élémens d'algèbre pour deux équations à deux inconnues, a l'inconvénient de conduire à une équation finale qui contient des racines étrangères. C'est pour cette raison que Paoli, dans ses élémens d'algèbre, ne fait qu'indiquer cette méthode, à laquelle j'ai donné depuis plusieurs années l'exactitude qui lui manquoit, à-peu-près de la manière qui suit.

La résolution de deux équations à deux inconnues se réduit toujours à celle de deux équations dont les premiers membres n'ont aucun facteur commun. Soient

$$A=0, \qquad B=0.$$

Ces équations, dont x et y sont les inconnues ; cherchons-en les solutions.

Supposons que $x=\alpha$, $y=\beta$, soient des valeurs conjuguées qui satisfont à ces équations. Si l'on substitue β au lieu de y, A et B seront changés en deux polynômes A' et B', qui ne contiendront plus que x ; et si l'on y fait $x=\alpha$, ils devront devenir nuls : donc ils doivent avoir $x-\alpha$ pour diviseur commun. Réciproquement, si $y=\beta$ substituée dans A et B, fait acquérir à ces polynômes un diviseur $x-\alpha$; $y=\beta$ et $x-\alpha$ formeront une solution des équations $A=0$, $B=0$. Donc, *toute valeur de* y, *habile à former une solution aux proposées*,

doit faire acquérir à leurs premiers membres un diviseur commun ; et vice versâ, *toute valeur de y qui fait acquérir un commun diviseur aux deux premiers membres, est habile à former une solution de ces deux équations* (*).

Il est démontré que tout diviseur commun à deux polynômes doit diviser le reste de leur division, et que tout diviseur commun au diviseur et au reste d'une division, doit diviser le dividende (**). Ordonnons A et B par rapport à x; supposons que A soit, par rapport à cette inconnue, d'un degré plus élevé que B; divisons A par B, et arrêtons l'opération au reste R, que l'on ne peut plus diviser sans prendre des fractions au quotient. D'après le principe que nous venons de rappeler, il est évident que toute valeur β de y, qui fait acquérir un facteur commun à A et B, doit le faire acquérir au reste R; et toute valeur β de y, qui fait acquérir à B et à R un diviseur commun, doit aussi le faire acquérir à A. Donc, $A=0$, $B=0$ *ont les mêmes solutions que les équations* $B=0$, $R=0$ (***).

Supposons qu'en ne prenant au quotient que des termes entiers, on arrive à un reste R qui soit, en x, d'un degré moindre que B; $B=0$, $R=0$ peuvent être traitées à leur tour comme les proposées. Soit R' le reste de la division de B par R, on substituera $R=0$, $R'=0$, aux dernières équations.

(*) Cette conséquence très-simple est le principe fondamental de la théorie de l'abaissement des équations; et sans changer tout-à-fait cette dernière, l'on ne sauroit le supprimer des élémens.

(**) Cette proposition n'a plus de sens dès que le diviseur et le reste ne sont pas entiers. Ce n'est donc pas pour éviter les fractions, qu'on supprime ou qu'on introduit des facteurs dans la recherche du plus grand commun diviseur; c'est par nécessité.

(***) Il est facile de démontrer directement cette proposition. Désignons par Q le quotient de la division, l'on aura $A=BQ+R$. D'où l'on conclut que toute solution de $A=0$, $B=0$, doit rendre $R=0$; et toute solution de $B=0$, et $R=0$, doit résoudre $A=0$.

On doit remarquer que cette conséquence seroit infirmée, si Q étoit fractionnaire de la forme $\frac{H}{K}$. En effet, l'on auroit alors $A=\frac{BH}{K}+R$. Supposons que des valeurs de x et de y rendent $A=0$, $B=0$, il pourroit se faire qu'elles rendissent aussi $K=0$; alors $\frac{BH}{K}$ deviendroit $\frac{0}{0}$, et pourroit avoir une valeur finie ou infinie: donc on ne pourroit plus conclure $R=0$.

C'est de cette manière que j'ai d'abord démontré cette proposition pour rectifier la théorie de l'élimination; mais il est mieux de la tirer de la propriété qui fait trouver le plus grand commun diviseur, et de lier ainsi deux théories entr'elles.

Supposons que chaque division se fasse toujours avec les mêmes conditions que celle de A par B, la division de R par R' donnera un reste R'', et les équations précédentes seront remplacées par

$$R'=0, \; R''=0.$$

Par ce procédé on arrivera enfin à un reste indépendant de x. Soit R'' ce reste, la résolution des équations proposées sera ramenée à celle des équations à une seule inconnue. En effet, elles ont les mêmes solutions que les précédentes; et pour résoudre celles-ci, il suffit de prendre toutes les valeurs de y que peut fournir $R''=0$; et en substituant chacune d'elles successivement dans $R'=0$, on déterminera les valeurs correspondantes de x.

Mais il n'arrivera que dans des cas particuliers, que l'on puisse faire les divisions successives sous les conditions précédemment énoncées ; c'est-à-dire, en ne prenant que des quotiens entiers, et poussant chaque division jusqu'à un reste, dont le premier terme contienne x à un exposant moindre que le premier terme du diviseur. Tâchons de ramener tous les cas à celui-ci. Il suffit pour cela de supprimer dans le diviseur ou d'introduire au besoin des facteurs dans le dividende. Dans la recherche du plus grand commun diviseur, ces opérations n'altèrent pas le résultat qu'on se propose d'obtenir; mais il n'en est pas ainsi dans la recherche qui nous occupe; il convient donc d'examiner les effets qu'elles doivent produire.

Reprenons les équations $A=0$, $B=0$ que je suppose être les proposées, ou deux équations qui en ont pris la place. Supposons que la division de A par B ne puisse pas se faire en termes entiers; ce cas ne peut arriver que parce que le coefficient du premier terme de B contient des facteurs qui ne sont point dans le premier terme de A. Soit D le produit de ces facteurs, et supposons d'abord que D divise tous les termes de B, alors les équations $A=0$, $B=0$ peuvent prendre la forme

$$A=0, \; B'D=0;$$

or, celles-ci peuvent se résoudre, soit en faisant

$$A=0, \; B=0,$$

soit en faisant

$$A=0, \; D=0.$$

Donc, on pourra supprimer le facteur D dans le diviseur,

pourvu qu'on joigne aux solutions déterminées par la suite du calcul celles des deux dernières équations (*).

Supposons, en deuxième lieu, que D soit un facteur en y étranger au premier terme du dividende, et qui ne soit pas commun à tous les termes du diviseur : la division deviendra possible en termes entiers, en multipliant A par D. Mais alors aux équations $A=0$, $B=0$, l'on substitue $AD=0$, $B=0$. Or, celles-ci sont satisfaites non seulement par les solutions de

$$A=0, B=0,$$

mais encore par celles de

$$D=0, B=0.$$

D'où l'on voit que la suite du calcul doit donner de trop les solutions des deux dernières équations; donc il faudra les supprimer.

Enfin, il pourroit arriver que parmi les facteurs du premier terme du diviseur qui empêchent la division de réussir, les uns fussent communs à tous les termes du diviseur, et que les autres ne le fussent point. Soit D le produit des premiers, et D' celui des seconds, il ne suffira pas, pour rendre la division possible, de supprimer D dans B; mais il faudra encore multiplier A par D'. La première opération supprime dans le calcul toutes les solutions de $A=0$, $D=0$; donc il faudra les rétablir : au contraire, la deuxième introduit celles de $D'=0$, $B=0$; donc il faudra les supprimer.

Concluons à présent qu'une marche tout-à-fait semblable à celle qui fait trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes, conduira enfin à deux restes, dont le dernier ne contiendra que y. Soient Z' et Z ces deux restes, les équations

$$Z'=0, Z=0$$

donneront les solutions des proposées, abstraction faite de celles que l'on a introduites ou supprimées.

Pour déterminer ces dernières, nommons S, S', etc., les facteurs en y, supprimés pour rendre les divisions possibles sur les dividendes respectifs U, U', etc.; nommons I, I', etc., les facteurs que l'on a introduits pour rendre possibles les divi-

---

(*) Il est bon de remarquer, en général, que si B peut se décomposer en facteurs B', B'', etc., l'on pourra ramener la résolution de $A=0$, $B=0$, à celle des systèmes d'équation $A=0$, $B'=0$; $A=0$, $B''=0$; etc.

sions par les diviseurs V, V', etc. Il faut joindre aux solutions de $Z'=0$, $Z=0$, celles des systémes d'équations

$$U=0,\ S=0\ ;\ U'=0,\ S'=0\ ;\ \text{etc.};$$

et parmi toutes ces solutions réunies, supprimer celles des systêmes suivans :

$$V=0,\ I=0\ ;\ V'=0,\ I'=0\ ;\ \text{etc.}$$

Ce qui précède réduit toute la difficulté à la résolution de deux équations, dont la première est à une seule inconnue. Soient donc

$$M=0,\ N=0$$

deux semblables équations, M ne contenant que y. Pour les résoudre, il suffit de déduire de la première toutes les valeurs qu'elle donne pour y, et de les substituer dans la deuxième, qui fait alors connoître les valeurs de x correspondantes.

Si une de ces valeurs de y rendoit N égale à une quantité donnée, elle devroit être rejetée. Il est même facile de séparer de $M=0$ cette sorte de racines, sans résoudre aucune équation. Nous ne nous y arrêtons pas.

Nous terminerons par faire remarquer que s'il étoit intéressant d'obtenir l'équation finale, c'est-à-dire celle qui contient toutes les valeurs de y, habiles à former des solutions aux équations proposées $A=0$, $B=0$, et qui n'en contient pas d'autres, l'opération n'auroit aucune difficulté : il suffit, pour y parvenir, d'effectuer des multiplications et des divisions.

Nous ne présentons pas de remarques sur le sujet que nous venons de traiter; celles qui méritent quelqu'attention s'offriront d'elles-mêmes.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES DE PARIS.

On a proposé au dernier concours (de l'an 1810) les deux questions suivantes :

Mathématiques. L'hyperbole dont l'équation est

$$y^2=\frac{A^2}{B^2}\ (x^2+B^2),$$

étant supposé faire une révolution autour de l'axe des x, trouver,

1°. L'équation de la surface du solide engendré par cette révolution ;

2°. Par un point quelconque pris sur cette surface et déterminé par les trois coordonnées f, g, h (dont deux f, g, sont dirigées suivant les axes des x et y de l'hyperbole génératrice, et la troisième h, est perpendiculaire à leur plan), faire passer une ligne droite qui soit située toute entière sur cette surface.

Pour satisfaire à la seconde partie, il faudra prouver qu'en effet une ligne droite peut être menée par le point donné, de manière que tous ses points se trouvent sur la surface de l'hyperboloïde dont il s'agit, et donner en même-temps les deux équations de cette droite.

(Voyez l'article *hyperboloïde de révolution*, page 242 du 1er. volume de la Correspondance).

Physique. Expliquer le phénomène produit par l'instrument électrique, appelé *Bouteille de Leyde.* On fera voir comment s'exercent les actions électriques qui conduisent la bouteille par degrés jusqu'au terme où elle est chargée à saturation.

On supposera que la décharge s'opère soit par des contacts alternatifs, soit d'une manière subite, et l'on exposera les effets qui ont lieu dans l'un et l'autre cas.

MM. Larabie et Lacave, élèves du Lycée Napoléon, tous deux admis cette année à l'Ecole Polytechnique, ont obtenu l'un le prix de mathématiques, et l'autre le prix de physique.

---

§. II.

SCIENCES PHYSIQUES.

De la double Réfraction de la Lumière, par M. Hachette.

La connoissance du phénomène de la double réfraction est due à Erasme Bartholin, Danois, auteur d'un *Traité sur le Cristal d'Islande*, imprimé à Copenhague en 1670. Huygens a, le premier, découvert la loi que suit la lumière en se réfractant dans ce cristal ; l'hypothèse qui l'a conduit à cette découverte, l'accord parfait des principaux phénomènes de la double réfraction avec cette hypothèse, sont l'objet d'un Traité sur la Lumière, écrit en françois, et publié à La Haye en 1690.

On détermine par une seconde expérience dont il sera question ci-après, la valeur du demi grand axe a de l'ellipsoïde.

Cela posé, quel que soit le rayon incident, pour trouver le rayon réfracté extraordinaire, on imaginera le plan d'incidence qui passe par le rayon direct et par une perpendiculaire à la face d'incidence; on menera dans ce plan et par le point d'incidence, une perpendiculaire au rayon direct; on placera dans l'angle de cette perpendiculaire et de sa projection sur la face d'incidence, une droite parallèle au rayon direct qui représente la vitesse de ce rayon dans le vide, et qu'on peut supposer égale à l'unité: par le point où cette droite rencontre la projection du rayon direct, on élève une perpendiculaire au plan d'incidence; enfin par cette droite on mène un plan tangent à l'ellipsoïde de révolution, qui a un centre au point d'incidence, et dont on a déterminé les axes $2a$ et $2b$. Le diamètre de l'ellipsoïde qui passe par le point de contact est la droite suivant laquelle se dirige le rayon réfracté extraordinaire.

Cette construction géométrique est une conséquence de la loi d'Huygens.

On résout graphiquement la question relative au plan tangent à l'ellipsoïde, par les méthodes connues de la géométrie descriptive. On voit cette solution, dessin *A*, pl. 5.

Explication du dessin A, composé de trois figures, fig. 1 *a*, fig. 1 *b*, fig. 1 *c*, *pl.* 5.

La fig. 1 *a* est une projection verticale faite parallèlement au plan d'incidence du rayon de lumière *LI*, tombant sur la face *AC*, naturelle ou artificielle, du cristal *ABCD*.

La fig. 1 *b* est une projection horizontale faite parallèlement à la face d'incidence *AC* (fig. 1 *a*), *ABCD* (fig. 1 *b*).

MN (fig. 1 *b*) étant la projection horizontale de l'axe du cristal, la fig. 1 *c* est une projection verticale, parallèle au plan vertical passant par la projection horizontale de l'axe *MN* (fig. 1 *a*, fig. 1 *b*) du cristal.

SR (fig. 1 *a*) étant la vitesse de la lumière dans le vide, *IM*, *IP* (fig. 1 *c*) étant les demi-axes de l'ellipsoïde de révolution, il s'agit de trouver la direction du rayon extraordinaire, ou les projections *I a* de ce rayon sur les plans fig. 1 *a*, fig. 1 *b*.

Du plan tangent à l'ellipsoïde de révolution, mené par une droite donnée hors de cet ellipsoïde.

Soient *I R* (fig. 1 *a*.) une droite perpendiculaire au rayon de lumière *IL*, et *SR* une parallèle à ce rayon, dont la longueur comprise dans l'angle *AIR* représente la vitesse de la lumière dans le vide. Ayant élevé la perpendiculaire *ST* (fig. 1 *b*) à *IAS*, cette perpendiculaire est la droite par laquelle il s'agi

et par l'axe de révolution, petit axe de l'ellipsoïde, on imagine l'ellipse génératrice, la direction du rayon extraordinaire se confond avec l'un des diamètres de cette ellipse. Nommant a et b les demi-axes de l'ellipsoïde ou de l'ellipse génératrice, on démontre dans tous les traités de géométrie analytique, que V étant l'angle d'un diamètre de l'ellipse génératrice, avec le petit axe $2b$, on a pour l'expression d'un diamètre

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 V}}$$

M. Laplace a prouvé par le principe de la moindre action, que la vitesse du rayon direct dans le vide étant l'unité, on pouvoit prendre pour la vitesse du rayon extraordinaire suivant un diamètre de l'ellipsoïde, une quantité égale à l'unité divisée par ce diamètre; cette expression de la vitesse du rayon extraordinaire, qui s'accorde avec la loi d'Huygens, devient

$$\frac{1}{\frac{ab}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 V}}} \text{ ou } \frac{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 V}}{ab},$$

d'où il suit: 1°. que, lorsque le rayon extraordinaire se réfractera dans le sens de l'axe du cristal, sa vitesse sera $\frac{1}{b}$, puisque, dans ce cas, $\sin V=0$; 2°. lorsque le rayon extraordinaire se réfractera perpendiculairement à l'axe du cristal, sa vitesse sera $\frac{1}{a}$, puisqu'alors $\sin V=1$.

Lorsque la face d'incidence est perpendiculaire à l'axe du cristal, et que le rayon direct est parallèle à cet axe, les rayons ordinaire et extraordinaire qui résultent de la double réfraction se confondent; ils sont tous deux dirigés suivant une parallèle à l'axe du cristal; mais dans ce cas la vitesse du rayon extraordinaire est $\frac{1}{b}$, donc la vitesse du rayon ordinaire est la même; d'où il suit que b est le rapport de la vitesse 1 du rayon direct dans le vide à la vitesse $\frac{1}{b}$ du rayon ordinaire dans le cristal; donc b est, ainsi qu'Huygens l'avoit déjà remarqué, le rapport des sinus d'incidence et de réfraction du rayon ordinaire; rapport qu'on a trouvé par expérience de 1,656.

La droite suivant laquelle la double réfraction se réduit à une réfraction simple, est une ligne très-remarquable dans les substances du genre du cristal d'Islande; on la nomme *Axe de réfraction*. Il paroît qu'en général cet axe est placé symétriquement par rapport aux faces des cristaux de forme primitive.

(F). $d^2+d'^2=a^2+b^2$. (G). $dd' \sin A=ab$,

A étant l'angle des diamètres d et d', ou du diamètre d et de la tangente à l'ellipse génératrice, menée par l'extrémité d.

Soient (Fig. 1c pl. V) $I'V$ le diamètre d, $T'VI'$ l'angle A. Dans le triangle $T'I'V$, l'angle I' est le complément de l'angle θ' de réfraction; donc le sinus de l'angle $I'T'V$ est égal au sinus de ($A+90°-\theta'$) ou au cosinus de ($A-\theta'$);

donc $\sin I'T'V=\sin A \sin \theta' + \cos A \cos \theta'$,

$$\text{et } I'T'=\frac{d \sin A}{\sin I'T'V}=\frac{d \sin A}{\sin A \sin \theta' + \cos A \cos \theta'}.$$

Cette expression est la valeur de IS (Fig. 1a), lorsque le rayon direct IL est dans le plan de la section principale; donc pour ce cas, qui est celui que nous considérons, on connoît dans le triangle rectangle SRI, le côté SI, et le côté SR qui représente la vîtesse 1 du rayon direct; donc l'angle RIS égal à l'angle θ d'incidence de ce rayon, a pour sinus $\frac{1}{IS}$, ou

$$(H) \qquad \frac{\sin A \sin \theta' + \cos A \cos \theta'}{d \sin A}=\sin \theta.$$

Nommant λ l'angle de la face d'incidence et du plan perpendiculaire à l'axe du cristal, on a $V=\theta'-\lambda$. Mettant cette valeur dans l'équation (E), on a

$$(K). \qquad d=\frac{ab}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2(\theta'-\lambda)}}$$

Ayant éliminé de l'équation (H), les quantités d, d', A au moyen des équations (K), (F), (G), l'équation résultante ne contiendra plus que θ, θ', λ, a et b. Faisant tomber un rayon de lumière direct dans le plan de la section principale, et observant les angles θ et θ', on déterminera d'après cette équation la valeur a du demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution.

La mesure des angles θ et θ' peut se faire sur un cristal quelconque, sans qu'on soit obligé de changer les faces naturelles ou artificielles de ce cristal; mais si on suppose que le cristal ait été taillé de manière que la face d'incidence fût parallèle à l'axe de réfraction, la mesure des angles θ et θ' devient beaucoup plus simple, ainsi que M. Malus l'a observé, page 138 de sa *Théorie de la double réfraction*; car, dans ce cas, le plan d'incidence coupe l'ellipsoïde de révolution suivant un cercle du rayon a; alors quel que soit le rayon direct, le rayon extraordinaire se dirige d'après la construction géométrique d'Huygens, dans le plan de ce cercle; d'où il suit que le rapport du sinus d'incidence et de réfraction extraordinaire est constant et égal à a; donc l'observation des angles d'incidence et de réfraction dans le plan du cercle perpendiculaire au petit axe $2b$, donne directement la valeur $2a$ du grand axe de l'ellipsoïde.

De la Polarisation de la Lumière.

La lumière se polarise par réfraction et par réflexion. On a observé la polarisation par réfraction dans les substances diaphanes (*) du genre du cristal d'Islande, capables de la double réfraction. Cette modification de la lumière consiste en ce qu'un rayon lumineux polarisé étant convenablement placé par rapport à une substance diaphane capable de la double réfraction, il ne se décompose plus en rayon ordinaire et extraordinaire; il traverse cette substance, ou comme un rayon ordinaire, ou comme un rayon extraordinaire.

De la Polarisation par réfraction.

Voici de quelle manière Huygens s'exprime sur cette propriété de la lumière : « Devant que de finir le traité de ce » cristal (d'Islande), j'ajouterai encore un phénomène mer» veilleux, que j'ai découvert après avoir écrit tout ce que dessus. » Car bien que je n'en aie pas trouvé jusqu'ici la cause, » je ne veux pas laisser pour cela de l'indiquer, afin de donner » occasion à d'autres de la chercher. Il semble qu'il faudroit » faire encore d'autres suppositions, outre celles que j'ai faites, » qui ne laisseront pas pour cela de garder toute leur vraisem» blance, après avoir été confirmées par tant de preuves. »

» Le phénomène est qu'en prenant deux morceaux (**) de ce » cristal, et les appliquant l'un sur l'autre, ou bien les tenant avec » de l'espace entre deux, si tous les côtés de l'un sont parallèles « à ceux de l'autre, alors un rayon de lumière, comme *AB* (fig. 2, » pl. 5), s'étant partagé en deux dans le premier morceau, savoir » en *BD* et en *BC*, suivant les deux réfractions régulière et » irrégulière; en pénétrant de-là à l'autre morceau, chaque » rayon y passera sans plus se partager en deux; mais celui » qui a été fait de la réfraction régulière, comme ici *DG*, » fera seulement encore une réfraction régulière en *GH*; et » l'autre *CE*, une irrégulière en *EF*; et la même chose arrive » non-seulement dans cette disposition, mais aussi dans toutes » celles où la section principale de l'un et l'autre morceau se » trouve dans un même plan, sans qu'il soit besoin que les » deux surfaces qui se regardent soient parallèles. Or, il est » merveilleux pourquoi les rayons *CE* et *DG* venant de l'air » sur le cristal inférieur, ne se partagent pas de même que » le premier rayon *AB*. On diroit qu'il faut que le rayon *DG*,

---

(*) Les substances connues de ce genre sont : Le spath d'Islande. — L'arragonite. — La chaux sulfatée. — La barite sulfatée. — La strontiane sulfatée. — La soude boratée. — Le quartz. — Le zircon. — Le corindon. — La cimophane. — L'émeraude. — L'euclase. — Le feldspath. — La mésotype. — Le péridot. — Le soufre. — Le mellite. — Le plomb carbonaté. — Le fer sulfaté.

(**) M. Malus a, le premier, fait voir que deux cristaux quelconques à double réfraction et de nature différente, présentoient le même phénomène.

» en passant par le morceau de dessus, ait perdu ce qui est
» nécessaire pour mouvoir la matière qui sert à la réfraction
» régulière; mais il y a encore autre chose qui renverse ce
» raisonnement. C'est que, quand on dispose les deux cristaux
» en sorte que les plans qui font les sections principales, se
» coupent à angles droits, soit que les surfaces qui se regardent
» soient parallèles ou non, alors le rayon qui est venu de la
» réfraction régulière, comme *DG*, ne fait plus qu'une réfrac-
» tion irrégulière dans le morceau inférieur; et au contraire,
» le rayon qui est venu de la réfraction irrégulière, comme *CE*,
» ne fait plus qu'une réfraction régulière. Mais dans toutes les
» autres positions infinies, outre celles que je viens de déter-
» miner, les rayons *DG*, *CE* se partagent de rechef chacun en
» deux, par la réfraction du cristal inférieur, de sorte que du
» seul rayon *AB* il s'en fait quatre, tantôt d'égale clarté, tantôt
» de bien moindre les uns que les autres, selon la diverse
» rencontre des positions des cristaux, mais qui ne paroissent
» pas avoir ensemble plus de lumière que le seul rayon *AB*.

. . . .

» Pour dire comment cela se fait, je n'ai rien trouvé jusqu'ici
» qui me satisfasse. »

Quoique la cause de la polarisation ne soit pas plus connue maintenant qu'elle ne l'étoit à l'époque où Huygens publioit son *Traité de la Lumière*, les nouvelles expériences de M. Malus ont appris que toutes les substances opaques ou diaphanes pouvoient polariser la lumière.

De la Polarisation par réflexion et par réfraction.

Soient *HO* (fig. 3, pl. 5) un plan horizontal, *MN* une glace non étamée, *LI* un rayon lumineux, faisant avec l'horison un angle de 19° 10′, et avec la glace *MN* un angle *MIL* de 35° 25′ Ce rayon se réfléchissant en partie suivant une verticale *II′*, telle que l'angle *NII′* soit aussi de 35° 25′, le rayon réfléchi *II′* est *polarisé*. Si on faisoit tomber ce rayon sur un cristal d'Islande dans le plan de sa section principale, et si ce plan étoit perpendiculaire à la glace *MN*, il n'éprouveroit pas la double réfraction. En faisant tomber ce même rayon *II′* sur une autre glace non étamée *M′N′* parallèle à *MN*, il se réfléchiroit en partie suivant *I′L′*, d'après la loi ordinaire de réflexion; mais si on fait tourner la glace *M′N′* autour de la droite *II′*, en faisant avec cette droite le même angle, de manière qu'elle soit toujours tangente au cône droit dont l'axe seroit *II′* et l'arête *I′M′*, elle arrivera dans une position telle, que la réflexion partielle du rayon lumineux *II′* n'aura plus lieu; ce rayon déjà polarisé se réfractera dans l'intérieur de la glace *M′N′*, et sortira encore *polarisé* de cette glace.

La lumière réfractée en *Ii* est en partie polarisée. Pour séparer

la partie polarisée de celle qui ne l'est pas, on la fait passer à travers une suite de glaces parallèles à MN. La lumière directe, qui a échappé à la polarisation de l'une des glaces, se polarise en partie sur la glace suivante, et on obtient par ce moyen un rayon Ii, qui est totalement polarisé en sens contraire du rayon réfléchi II'; c'est-à-dire qui se réfracte extraordinairement, tandis que le rayon réfléchi II' se réfracte ordinairement, lorsqu'ils passent ensemble dans le plan de la section principale d'un cristal à double réfraction, perpendiculaire à la glace MN. Pour vérifier cette différence de polarisation, on peut placer en $m\ n$ un petit miroir étamé, parallèle à la glace MN'; le rayon Ii se réfléchit en ii' parallèlement à II'. Ayant transporté la glace $M'N'$ en $m'n'$ parallèlement à elle-même jusqu'au point d'incidence i' du rayon ii', ce rayon ii' sera entièrement réfracté par la glace $m'\ n'$. Il faut se rappeler que par rapport au rayon II', cette réfraction totale n'a eu lieu que lorsque l'extrémité M' de la glace eut décrit un quart de circonférence.

Dans cette expérience on décompose, par réflexion et par réfraction, un rayon direct en rayon ordinaire et extraordinaire, et une substance diaphane quelconque remplace pour cette décomposition le cristal d'Islande, ou tout autre substance jouissant de la double réfraction.

L'angle sous lequel une substance diaphane décompose la lumière en rayon ordinaire et extraordinaire, l'un par réflexion et l'autre par réfraction, varie dans les différentes substances.

Toutes les fois qu'on produit par un moyen quelconque un rayon polarisé, on obtient nécessairement un second rayon polarisé dans un sens diamétralement opposé; et ces rayons suivent des routes différentes. La lumière ne peut pas recevoir cette modification dans un sens, sans qu'une partie proportionnelle ne la reçoive dans le sens contraire.

De l'Evaporation de l'eau dans le vide, et du froid artificiel produit par cette évaporation.

On place sous le récipient d'une machine pneumatique deux vases, dont l'un contient de l'eau, et l'autre de l'acide sulfurique. Après avoir fait le vide sous le récipient, on ferme la communication de ce récipient avec les corps de pompes. On obtient le vide d'autant plus facilement que le récipient est plus petit, et on gagne encore du temps en fermant les vases qui con-

tiennent l'acide et l'eau, par des obturateurs, et en ne soulevant cet obturateur(*) que lorsque l'air atmosphérique est enlevé. Le vide étant fait, et l'acide communiquant avec l'eau, on observera, après un certain temps, qui dépend de la quantité d'eau et de l'état hygrométrique de l'acide, que l'eau gèle et que l'acide s'échauffe. Ce double effet est dû à l'évaporation de l'eau dans le vide, et à la combinaison des vapeurs d'eau avec l'acide sulfurique. La propriété hygrométrique de l'acide tient lieu, dans ce cas-ci, du moteur, qui enleveroit, par le jeu des pistons de la machine pneumatique, la vapeur d'eau, à mesure qu'elle se formeroit. L'action chimique, plus continue et plus rapide que l'action mécanique, entretient sous le récipient le vide qui favorise l'évaporation de l'eau. L'absorption du calorique nécessaire pour convertir une partie de l'eau liquide en vapeurs, convertit l'autre partie en glace.

On peut, au lieu d'acide sulfurique, employer le muriate de chaux. A défaut d'un récipient de machine pneumatique, on conçoit facilement un vase dont on enleveroit l'air atmosphérique par un courant de vapeurs d'eau à 100°. comme dans les cylindres de pompes à feu. Cette vapeur étant condensée par refroidissement, on peut faire communiquer le cylindre par des tuyaux à robinets à deux vases, qui contiennent, l'un, l'acide sulfurique, l'autre, l'eau à évaporer. Alors on obtiendra les mêmes effets que sous le récipient de la machine pneumatique; l'eau se gelera, et la glace qu'on obtiendra par ce moyen ne coûtera que le combustible nécessaire pour rectifier l'acide sulfurique qui aura servi à la condensation de la vapeur d'eau formée dans le vide.

M. Leslie, physicien anglais, qui a le premier fait les expériences que nous venons de rapporter, s'est aussi servi d'un espace rempli d'un air très-dilaté, pour l'évaporation de la glace. Ayant fait geler plusieurs couches d'eau sur un tube de thermomètre, et l'ayant habillé par ce moyen d'une couche de glace, il l'a suspendu dans le récipient d'une machine pneumatique, rempli d'un air soumis à une pression d'environ un centimètre de mercure; il a placé dans le même récipient un vase contenant de l'acide sulfurique; la glace s'est évaporée, et le thermomètre a baissé jusqu'à — 37°. Réaumur; la température de l'atmosphère étant....

(*) Les obturateurs sont un obstacle à la formation des vapeurs d'eau et d'acide dans le vide, et au mélange de ces vapeurs avec l'air atmosphérique. L'acide sulfurique entre, suivant Bergman, en ébullition à la température de 282° du thermomètre centigrade, sous la pression atmosphérique. On n'a pas encore déterminé la force expansive de la vapeur de cet acide pour des températures inférieures; il paroît qu'elle est très-petite à la température même la plus élevée de l'atmosphère.

Le 20 avril 1811, le thermomètre Réaumur étant à + 13° j'ai fait geler six grammes d'eau dans une capsule de cuivre jaune du poids de trente-un grammes. L'acide sulfurique du commerce à 66° étoit placé sous le récipient, dans des capsules en verre; l'une, supérieure, contenoit environ cent grammes d'acide, et l'autre, inférieure, sept cents grammes. La température de l'acide s'est élevée de 13° à 20° dans la capsule supérieure, et de 13° à 15° dans l'inférieure.

Les six grammes d'eau ont été gelés en trois minutes, à compter du moment où le vide a été fait sous le récipient. Après quinze minutes, le thermomètre plongé dans la glace, étoit à — 6° Réaumur. J'ai pesé la quantité d'eau évaporée, que j'ai trouvée de 1,6 grammes. Ce poids observé diffère peu du poids calculé, qu'on déduiroit de la connoissance des calorIques spécifiques de l'eau et du cuivre de la capsule.

Lorsqu'on a pour objet de produire un froid artificiel par l'évaporation dans le vide ou dans un air très-dilaté, on évite autant que possible le retour du calorique du vase qui contient la substance hygrométrique vers le vase qui contient le liquide à évaporer. Mais si l'on se propose seulement de produire l'évaporation, on la favorisera en faisant communiquer ces vases, de manière que le calorique passe alternativement du premier au second. Un physicien (M. Clément) a déjà proposé d'employer ce mode d'évaporation par l'intermédiaire d'un air très-dilaté, pour la réduction des sirops, pour le dessèchement des substances nutritives, animales et végétales, pour la fabrication de la poudre à canon, des colles-fortes, etc. H. C.

Sur le Nautile-Marin, par MM. Coessin frères (*).

Le nautile-marin a pour objet d'établir une navigation sous-marine. Les expériences faites au Hâvre avec l'autorisation du Ministre de la Marine, paroissent ne laisser aucun doute sur la possibilité de cette navigation. Dans un rapport fait à l'Institut le 1er avril 1811, et adopté par la classe des Sciences physiques et mathématiques, le rapporteur, M. Carnot, donne la description suivante du nautile-marin :

« C'est une espèce de grand tonneau qui a la forme d'un ellipsoïde alongé. C'est dans cet ellipsoïde que s'enferment les navigateurs. Ce nautile avoit vingt-sept pieds de longueur (8,77 mètres) et renfermoit neuf personnes.

Pour le maintenir dans sa position, on le charge d'un lest.

Ce nautile est partagé en trois parties séparées l'une de l'autre

---

(*) M. Coëssin jeune est un ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, actuellement officier d'artillerie.

par des doubles fonds. La partie du milieu est seule occupée par les navigateurs ; celles de l'avant et de l'arrière se remplissent à volonté d'air ou d'eau, par les manœuvres de ces mêmes navigateurs, suivant le poids qu'ils veulent donner au nautile, afin qu'il puisse flotter à la surface du fluide, ou s'y enfoncer si l'on veut.

Pour imprimer au vaisseau un mouvement progressif, on emploie deux rangs de rames à porte, que font mouvoir ceux qui sont dans l'intérieur. Ces rames passent au travers des flancs du nautile; mais les ouvertures sont masquées par des poches de cuir qui empêchent absolument l'eau d'y pénétrer; et si l'une d'elles venoit par hasard à crever, la rame est taillée de manière à faire elle-même, aussitôt, l'effet d'un tampon, en la tirant seulement à soi. Dans le nautile il n'y avoit que quatre rameurs, et il faisoit une demi-lieue par heure; mais il est aisé de multiplier le nombre de ces rameurs.

Pour diriger la machine et la faire virer de bord, on emploie un gouvernail placé à la poupe, comme dans les vaisseaux ordinaires, et qui se manœuvre du dedans par une corde; de plus, les navigateurs s'orientent à l'aide d'une boussole.

Pour monter ou descendre, ils emploient quatre ailes ou espèces de nageoires attachées deux à droite, et deux à gauche du nautile, et qu'un homme seul fait mouvoir par des tringles. On les incline de l'avant à l'arrière ou de l'arrière à l'avant, suivant qu'on veut ou monter ou descendre, parce qu'alors la résistance de l'eau occasionnée par le mouvement progressif agit sur ces plans inclinés conformément au but qu'on se propose.

Enfin, on se procure du jour au moyen d'une ou plusieurs glaces très-épaisses; mais comme l'obscurité devient très-grande à une certaine profondeur, les auteurs proposent de recueillir ce qui reste de rayons par de fortes loupes, qui pourront au moins leur faire distinguer ce qui se trouve près d'eux.

Pour vaincre la plus grande difficulté, celle de se procurer les moyens de respirer, on pratique des ouvertures ou petites écoutilles dans les douves supérieures du nautile. Par le moyen de ces ouvertures, en venant de temps en temps à la surface de l'eau, on renouvelle l'air du nautile, par une circulation qui s'établit alors facilement, soit par le ventilateur, soit, lorsque cela sera praticable, par des lampes qui, placées à quelques-unes de ces ouvertures, et correspondant jusqu'au fond du vaisseau par des tuyaux qui font l'effet de petites cheminées, en extraient l'air vicié, comme les réchauds placés au haut de l'ouverture d'une mine font circuler rapidement l'air jusqu'à sa plus grande profondeur.

Au surplus, il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire que ce renouvellement d'air dans le nautile soit fréquent; car dans les nombreuses expériences faites au Hâvre, les navigateurs sont restés plus d'une heure de suite sans aucune communication avec l'air extérieur et sans éprouver aucun mal-aise.

Mais c'est ici que la chimie vient efficacement au secours de la mécanique; car à défaut de tous les autres moyens, lès navigateurs pourvoient au besoin impérieux de respirer, par une ample provision d'oxigène comprimé, qu'ils tiennent en réserve, et dont ils font usage avec l'économie que leur commande l'intérêt de leur propre conservation.

MM. Montagnès-la-Rogue, capitaine de vaisseau commandant le port du Hâvre, et Grehan, ingénieur-constructeur en chef de la marine, qui ont été témoins des expériences faites avec le nautile, en ont rendu un témoignage avantageux, et ils pensent qu'on pourroit faire des vaisseaux de ce genre beaucoup plus grands. Parmi les coopérateurs des expériences faites au Hâvre, sont M. Colin, actuellement préparateur de chimie à l'Ecole Polytechnique, et M. Muller, aide-de-camp du général d'Hastrel. M. Ransonnet, commandant le brick l'*Alcyon*, servoit de pilote dans le nautile.

---

§. III.

ANNONCES D'OUVRAGES.

Journal de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction de cet Etablissement. Dixième cahier, 1 vol. in-4°.

Ce cahier contient : 1°. la solution de plusieurs problêmes de géométrie, par M. *Branchon*; 2°. un mémoire sur les polygones et sur les polyèdres, par M. *Poinsot*; 3°. deux mémoires d'hydrographie, par MM. *de Prony* et *de Humbold*; 4°. les programmes du cours de grammaire et belles-lettres, par M. *Andrieux*.

Recherches Physico-Chimiques, *faites à l'occasion de la grande Batterie Voltaïque, donnée par S. M. à l'Ecole Polytechnique*, 2 vol. in-8°. avec six planches. *Par MM.* Gay-Lussac et Thenard, Instituteurs de Chimie à l'Ecole Polytechnique.

Cet ouvrage est terminé par un rapport fait au nom d'une commission de l'Institut, composée de MM. Laplace, Monge, Chaptal, Haüy et Berthollet. Le rapporteur, M. Berthollet,

après avoir fait mention des brillantes découvertes de M. Davy, chimiste anglais, a donné l'analyse du travail de MM. Gay-Lussac et Thénard, commencé en mars 1808, époque à laquelle ils ont obtenu, par un procédé de leur invention, le nouveau *Métal* (le potassium), qui a été l'agent principal de leurs découvertes. En lisant le précis de M. Berthollet, on se convaincra que ce nouvel ouvrage contribuera autant aux progrès de la chimie, que le traité du célèbre Lavoisier sur cette science. (*Voyez la Correspondance*, pag. 445 — 453 du premier volume, et pag. 28 du 1er cahier, pag. 109 du 2e. cahier du second volume.)

De la Défense des places fortes, ouvrage composé par ordre de S. M. I. et R., pour l'instruction des Elèves du Corps du Génie. Par M. Carnot. Seconde édition; Paris 1811.

Cette nouvelle édition contient un Mémoire additionnel fort intéressant, sur les améliorations dont l'art défensif est susceptible.

M. Carnot jugeant que la meilleure des armes pour la défense rapprochée, est la grenade, a imaginé un nouveau moyen de la lancer. Il a fait monter sur un petit mortier à grenade une platine de fusil d'infanterie, et une espèce de fût avec un crochet qui empêche le recul, de manière qu'un homme peut très-aisément charger un petit mortier, le pointer et le tirer seul comme un mousquet. Cette arme porte fort loin : l'essai en a été fait au Champ-de-Mars. Avec une simple cartouche ordinaire de fusil, elle porte la grenade jusqu'à trois cents pas, passant par-dessus les arbres.

Un autre Mémoire additionnel contient diverses données et plusieurs résultats d'expériences nécessaires pour la direction et l'exécution des travaux relatifs à la guerre offensive et défensive. Ce Mémoire sera très-utile aux militaires de toute arme.

Traité élémentaire des Machines, suivi d'un Rapport de M. Carnot, membre de l'Institut; 1 vol. in-4°., 28 pl. in-fol. par M. Hachette, *Instituteur de l'Ecole Polytechnique* ; ouvrage dédié à M. le sénateur Monge.

Projet d'Hôpital pour quinze cents Malades. Par M. Rohault, *ancien Elève de l'Ecole Polytechnique*.

Depuis long-temps on fait des vœux pour que l'Hôtel-Dieu de Paris soit remplacé par un hospice plus vaste et mieux situé. Le projet de M. Rohault a déjà obtenu les suffrages des ingénieurs et des architectes les plus éclairés.

Thèse de Mécanique (la première qui ait été soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris), par M. BOURDON, *ancien Elève de l'Ecole Polytechnique*, *Docteur-ès-Sciences*, *et Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne*. Brochure in-4°. ; avril 1811.

Cette thèse, que M. Bourdon a dédiée à son ami et ancien condisciple S. D. Poisson, est divisée en deux parties ; dans la première, il a exposé la théorie des axes principaux des corps solides, par une méthode semblable à celle qu'il a suivie pour la détermination des axes principaux d'une surface du second degré (*voyez* pag. 189) ; la seconde partie renferme la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Considérations générales sur l'application de la Chimie aux diverses branches de la Médecine.

Tel est le titre d'une Thèse présentée et soutenue à la Faculté de Médecine de Paris, le 18 avril 1811, par M. A. J. DE LENS, de Paris, Docteur en Médecine.

Cet ouvrage est divisé en sept articles, qui comprennent les applications de la Chimie à l'*Art de l'Anatomiste*, à la *Physiologie*, à l'*Hygiène*, à la *Pathologie*, à la *Pharmacie*, à la *Matière médicale*, à la *Thérapeutique*, à la *Médecine légale* et à la *Médecine pratique* : chacun de ces articles offre des subdivisions relatives au sujet qui y est traité.

L'auteur de cette Thèse, dont le père jouit de l'estime due à de longs et utiles services dans l'administration de l'Ecole Polytechnique, a fait ses premières études de chimie dans cette école ; M. Guyton-Morveau, à qui l'on doit l'heureuse application de la chimie à la désinfection de l'air, a adressé au père de ce jeune médecin des complimens sur le jugement et l'érudition qu'il a remarqués dans cette première production de son fils, et sur la manière brillante avec laquelle il débute dans la carrière.

---

§. IV.

PERSONNEL.

Nomination à des places dans l'Ecole.

M. Morlet (Marie-Pierre-Hippolyte), capitaine du génie, ex-élève de l'Ecole Polytechnique, a été nommé par S. Ex. le

Ministre de la Guerre, à l'une des places de sous-inspecteur des études.

M. Petit (Alexis-Thérèse), ex-élève, a été nommé répétiteur de physique.

M. Janot Destainville, ex-élève, a été nommé adjoint aux répétiteurs d'analyse, à la place de M. Petit.

M. Demarteau (Jacques-Antoine), ex-élève, a été nommé répétiteur adjoint à la place de M. Boucharlat, nommé professeur de mathématiques au Prytanée militaire de la Flèche.

MM. Collin et Cluzel ont été nommés répétiteurs de chimie; le premier en remplacement de M. Gay-Lussac, nommé instituteur; et le deuxième en remplacement de M. Drappier, démissionnaire.

Les membres du Conseil d'Instruction de l'Ecole Polytechnique, employés dans l'Université Impériale, sont :

MM. Legendre, conseiller-titulaire;
Ampère, inspecteur-général;
Lacroix, *doyen*, Professeur de la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris;
Poisson, ... *idem*;
Thénard, ... *idem*;
Gay-Lussac, ... *idem*;
Hachette, ... *idem*, adjoint.

Tous les professeurs de la Faculté des Sciences de l'Académie, chargés de l'enseignement des Mathématiques, c'est-à-dire de l'analyse, de la mécanique, et de l'astronomie, sont, à l'exception du doyen (M. Lacroix), anciens élèves de l'Ecole Polytechnique. MM. Biot et Dinet enseignent l'astronomie; M. Francœur est professeur d'algèbre.

M. Poinsot, qui remplace M. Labey comme instituteur d'analyse à l'Ecole Polytechnique, est inspecteur-général de l'Université.

M. Petit, répétiteur de physique à l'Ecole Polytechnique, est chargé provisoirement du cours de physique du Lycée Bonaparte. (*Arrêté de S. Exc. le Grand-Maître de l'Université*, du 6 *octobre* 1810.)

Promotions des anciens Élèves de l'École Polytechnique à des grades supérieurs.

ARTILLERIE.

Un colonel, M. Berge.

Six lieutenans-colonels, MM. Demay. —Husson.—Capelle. — Boussaroque. — Renaud. — Bernard (L. M.).

GÉNIE.

Un colonel, M. Valazé.

Un major, M. Malus.

Vingt-deux lieutenans-colonels, MM. Richaud.— Bernard (Simon). — Goll. — Prevost - Vernois. — Delaage. — Legentil.—Lafaille.— Rohault (Fleury.)—Lamy.— Constantin. — Thuilier. — Beaulieu. — Daullé. — Bodson. — Bouchard. — Cossigny. — Burel. — Moret. — Treussart. — Vincent. — Guilley (Amédée). — Andoueaud.

PONTS-ET-CHAUSSÉES.

Treize ingénieurs en chef, MM. Lamandé, — Brisson. — Saint-Genis. — Fevre (J.-B.-Simon). — Garella. — Cavenne. — Eudel. — Gorse. — Grebert. — Jousselin. — Mesnager. — —Raffeneau. — Vauvilliers.

MINES.

Un ingénieur-divisionnaire, M. Héron-de-Villefosse.

Un ingénieur en chef de première classe, M. Brochant de Villiers.

Trois ingénieurs en chef de deuxième classe; MM. Gallois. — Calmelet. — De Bonnard.

Prix biennal accordé à l'auteur de la découverte la plus importante sur la lumière ou sur la chaleur.

La Société royale de Londres a, dans sa séance du 22 mars 1811, décerné ce prix à M. Malus (*).

(*) Voyez la *Théorie de la double réfraction de la Lumière dans les substances cristallisées*, Mémoire couronné par l'Institut dans la séance publique du 2 janvier 1810. M. Malus a, dans ce Mémoire, confirmé la loi d'Huygens sur la double réfraction de la lumière, en faisant voir l'accord parfait de cette loi avec les phénomènes déjà connus, et avec un grand nombre d'autres qu'il a lui-même observés, et principalement avec ceux qui dépendoient de la réflexion de la lumière par les surfaces inférieures des cristaux diaphanes à double réfraction.

Distribution des Prix faite par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur, M. le Comte de Montalivet, à MM. les Elèves de l'Ecole Impériale des Ponts-et-Chaussées, le 18 avril 1811.

Concours de 1809.

Projet de route...	1er. Prix.......	M. Pellegrini.
	2e. Prix.......	M. Manetti.
Pont mobile....	1er. Prix.......	M. Brémontier.
Pont en pierre...............		
Projet de navigation.........	Deux 1ers Prix..	MM. Spinasse, Emmery.
	Deux 2es Prix...	MM. Leblanc, Girault.
Ecluse à sas....	1er. Prix........	M. Jousselin.
	2e. Prix.......	M. Poirée.
Projet d'arsenal maritime....	1er. Prix.......	M. Mordret.
	2e. Prix.......	M. Méquin.
Projet de préfecture.........	1er. Prix.......	M. Silguy.
	2e. Prix.......	M. François.
Maison de campagne.......	2e. Prix.......	M. Pellegrini.

Concours de 1810.

Dessin de la Carte............		
Projet de route..	1er. Prix.......	M. Duleau.
	2e. Prix.......	M. Vinard.
Coupe des Pierres	2e. Prix......	M. Journet.
Pont en pierre...	1er. Prix.....	M. Jousselin.
	2e. Prix......	M. Letocart.
Barrage à la mer..	1er. Prix.....	M. François.
	2e. Prix......	M. Girault.
Projet de château d'eau.......	1er. Prix.....	M. Letexier.
	2e. Prix.....	M. Melville.
Bains publics...	1er. Prix.....	M. Letocart.
	2e. Prix.....	M. Pellegrini.
Maison de campagne.......	2e. Prix....	M. Fresnel.

CONCOURS DE 1811.

Mécanique appliquée	1er. Prix.	M. Bélanger.
	2e. Prix.	M. Coriolis.
Dessin de la carte.		
Projet de route. . .	1er. Prix.	M. Guillebon.
	2e. Prix.	M. Moneuze.
Projet de pont en charpente.	1er. Prix.	M. Journet.
	2e. Prix.	M. Grandin.
Projet de navigation	1er. Prix.	M. Duleau.
	2e. Prix.	M. Lemasson.
Projet d'église. . .	1er. Prix.	M. Viollet.
	2e. Prix.	M. Journet.
Ecole de Marine. .	1er. Prix.	M. Duleau.
	2e. Prix.	M. Kermel.
Maison de campagne	1er. Prix.	M. Gensolen.
	2e. Prix.	M. Hurel.

Conseil de perfectionnement.

La onzième session du conseil de perfectionnement a été ouverte le 26 octobre 1810, et a été terminée le

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole, Président.

S. Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics; membres désignés par la loi.

MM. Legendre, Lacroix, Vauquelin, Malus.

Membres de l'Institut national pris, selon la loi, dans la classe des sciences physiques et mathématiques.

MM. les comtes Laplace, Lagrange, Berthollet.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre.

MM. Cotti, officier supérieur d'artillerie; Allent, officier supérieur du Génie; Bonne, officier supérieur du génie-géographe; Champy père, administrateur général des poudres et salpêtres.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine.

M. Sugny, inspecteur-général d'artillerie de marine; M. Sané, inspecteur-général du génie maritime.

Nota. M. Sugny n'étant pas à Paris, a été remplacé par M. le général Thirion, inspecteur-adjoint d'artillerie de marine.

Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur.

MM. Bruyère, inspecteur-général des ponts et chaussées; Lelièvre, inspecteur-général des mines.

Directeur des études de l'Ecole Polytechnique.

M. le baron de Vernon.

Commissaires choisis par le Conseil d'Instruction de l'Ecole, parmi ses membres.

MM. Monge, Hachette, Gay-Lussac, Durand.

Secrétaire du Conseil.

M. Marielle, *Capitaine, Quartier-Maître de l'Ecole Polytechnique.*

Concours de 1810.

Examinateurs d'admission à l'Ecole Polytechnique.

Paris.........................	M. Reynaud;
Tournée du Sud-Ouest..........	M. Francœur;
Tournée du Nord-Est..........	M. Dinet;
Tournée du Sud-Est...........	M. Labey.

Les examens ont été ouverts le 1er août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission de l'Ecole impériale Polytechnique a prononcé le 25 septembre 1810, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

Trois cent soixante-trois candidats ont été examinés;

SAVOIR:

A Paris	159	363.
Dans les Départemens	204	

Sur ce nombre, 227 ont été jugés admissibles,

SAVOIR:

de l'examen de Paris	95	227.
des départemens	132	

Douze candidats ont été mis hors de concours, comme n'ayant pas satisfait aux conditions du programme, relatives aux connoissances exigées dans les langues française et latine; douze autres, parce qu'ils n'étoient pas assez exercés au dessin; en outre dix candidats ont été reculés de plusieurs rangs sur les listes, par ordre de mérite en raison du premier motif, et trois en raison du deuxième.

Un candidat a été écarté du concours pour s'être présenté à deux examinateurs.

Le nombre des candidats admis par le Jury a été de 167,

SAVOIR:

de Paris	85	167.
des départemens	82	

Nombre des élèves admis à l'Ecole jusqu'au 1er novembre 1809 . . . . . . 2306.

Total des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement . . . . . . 2473.

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 167 candidats admis à l'Ecole impériale Polytechnique, suivant la décision du Jury du 25 septembre 1810.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Alauze.	Jacques.	Bordeaux.	Gironde.
Balaran.	Louis-Constans.	Castres.	Tarn.
Barbier.	Joseph-Odille.	Besançon.	Doubs.
Bayard.	Ferdinand-Jean.	Philadelphie.	en Amérique.
Belmas.	Jacques-Vital.	Paris.	Seine.
Berdolle.	Antoine-Théodore.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Berjaud.	Jean-Baptiste.	Paris.	Seine.
Bertin.	Achille.	Fumay.	Ardennes.
Billaudel.	Jean-Baptiste-Basilide.	Rethel	Ardennes.
Blanc.	Antoine.	Saint-Geniés-le-Bas.	Hérault.
Blevec.	Bertrand-Hercule.	Port-Louis.	Isle-de-France.
Bompard.	Jean.	Bardonnêche.	Pô.
Bottex.	Auguste-Rodolhe.	Neuville sur Ain	Ain.
Boucquel-Beauval.	Léop.-Stan.-Emmanuel.	Tournai.	Jemmape.
Bouvet.	Jean-Victor.	Lorient.	Morbihan.
Brongniart.	Nicolas-Joseph.	Lillers.	Pas-de-Calais.
Bruno.	Pierre-Armand.	Grenoble.	Isère.
Bryon.	Pierre-Franç.-Alexandr.	Salins.	Jura.
Cabrol.	François-Gracchus.	Rodez.	Aveyron.
Caffort.	Joseph-Just.	Narbonne.	Aude.
Cartier.	François.	Paris.	Seine.
Castaing.	Ferdinand-Louis.	Alençon.	Orne.
Chaillou.	Alexandre-Hippolyte.	Paris.	Seine.
Chaillou.	Réné-Pierre.	Haute-Goulaine	Loire-Infér.
Charreyron.	Joseph.	Bellac.	Haute-Vienne.
Chauvet.	Pierre.	Sainte-Pience.	Manche.
Chiodo.	Augustin-Jérôme.	Savone.	Montenotte.
Cohendet.	Adrien-Joseph.	Paris.	Seine.
Collas-Courval.	Léon-Jean.	Argentan.	Orne.
Colomb.	Paul-François-Marie.	Saint-Claude.	Jura.

NOMS	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Corrard.	Alexandre-César.	Méry-sur-Seine	Aube.
Coste.	Louis-Alexis.	Salins.	Jura.
Coueffin.	Pierre-Raphaël-Denis.	Caen.	Calvados.
Coursin.	Jean-Baptiste-Félicité.	Paris.	Seine.
Dechauvenet.	Louis-Philippe-Henri.	Saint-Quentin.	Aisne.
De Grave.	Ursule-Jos.-Hip.-Casim.	Pezenas.	Hérault.
Delaborde.	Alexandre-Victor.	Paris.	Seine.
Desfeux.	Charles-Amable-Louis.	Paris.	Seine.
Despine.	Charles-Marie-Joseph.	Annecy.	Mont-Blanc.
Dessalle	François-Clet-Achille.	Paris.	Seine.
Dieudé.	Alexand.-Louis-Xavier.	Charleville.	Ardennes.
Donnat.	Franç.-Xavier-Eugène.	Haguenau.	Bas-Rhin.
Doucet.	Guillaume.	Tours.	Indre-et-Loire.
Douet.	Prosper.	Tours.	Indre-et-Loire.
Dumas.	Jean-Baptiste-Louis.	Pierre-Buffière.	Haute-Vienne.
Dumay.	Fidèle-Joseph.	Napoléonville.	Morbihan.
Duplan.	Joseph.	Paris.	Seine.
Durand	Constant-Hip.-Augustin.	Saint-Lô.	Manche.
Fabian.	Jean-Pierre.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Fabre.	Jean-Franç.-Guillaume.	Albi.	Tarn.
Falret.	Philippe-François.	Larnagol.	Lot.
Fiévée.	Adolphe-Joseph-Simon.	Paris.	Seine.
Forget de Barst.	Charl.-Gabr.-Ferdinand.	Longwy.	Moselle.
Fourmond.	Joseph-Franç.-Emilien.	Isle-de-France.	
Gaide.	Anne-François.	Wassy.	Haute-Marne.
Galis.	Antoine-Jean.	Paris.	Seine.
Gauthier.	Claude-François.	Vitreux.	Jura.
Gazan.	Alex.-Zach.-Alexis-Nic.	Antibes.	Var.
Gazeau de la Bouère.	Amand-Henri-Jacques-Charles.	Jallais.	Maine-et-Loire.
Gérard.	Jean-Baptiste-Antoine.	Velaine en Haye	Meurthe.
Girard.	Scœvola-Charles.	Douai.	Nord.
Giret.	Jean-Charles-Louis.	Séez.	Orne.
Godard de Rivocet.	Auguste-François.	Soissons.	Aisne.
Godin.	Jean-Alexis.	Poligny.	Jura.
Gohard.	Nicolas-Joseph.	Versailles.	Seine-et-Oise.
Gosselin.	François-Théodore.	Rouen.	Seine-Infér.
Grégoire.	Joseph-Marie.	Marseille.	B.-du-Rhône.
Grillet-Serry.	Etienne-Germain.	Auxerre.	Yonne.
Grimouville.	Théodore-Benjamin.	Cardonville.	Calvados.
Guilhou.	François-Charles.	Bordeaux.	Gironde.
Guilland.	François-Huningue.	Belley.	Ain.
Guillemot.	Charl.-Aimé-Jean-Bapt.	Oisy.	Pas-de-Calais.
Guy.	Jean-Pierre-Anselme.	Agde.	Hérault.
Guy.	Antoine-Marie.	Loyettes.	Ain.
Guyot-Versia.	Louis-Marie-Désiré.	Morteau.	Doubs.

NOMS	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Harmand.	Adrien-Molière-Pline.	Nemours.	Seine-et-Marne
Hébert.	Philippe-Julien.	Toulouse.	Haute-Garonne
Hennebert.	Nicolas-François.	Paris.	Seine.
Hubert.	Charles-Clair.	Saint-Quentin.	Manche.
Imbert-S.-Brice	Marie-Théodore-Penn.	Chassaigne.	Haute-Loire.
Jacquiné.	Pierre-Séraphin.	Rambervillers.	Vosges.
Jarrige-Lamazorie.	Joseph-Marie.	Tulle.	Corrèze.
Karth	Auguste-Frédéric.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Labarbe.	Jean-Marcellin.	Cazaubon.	Gers.
Lacave.	Louis-Henri-Hippolyte.	Paris.	Seine.
Lagarrigue.	Alexandre.	Lacabarède.	Tarn.
Lambert.	César-Joseph.	Toulon.	Var.
Lambert.	Charles-Joseph-Emile.	Bruchsal.	Gr.-D. de Bade.
Larabit	Marie-Denis.	Roye.	Somme.
Larchevêque-Thibaud.	Jean-Baptiste.	Cap-Français.	Isle S.-Doming.
Laugaudin.	Jean-Antoine.	Villeneuve-sur-Vanne.	Yonne.
Lebon-d'Haubersin.	Henri-Hippolyte.	Paris.	Seine.
Lecarpentier.	Bruno.	Honfleur.	Calvados.
Ledenmat-Kervern.	Eugène-Marie-Hippolyte	Morlaix.	Finistère.
Lefebvre.	Charles-Emmanuel.	Turetot.	Seine-Infér.
Lefebvre.	Auguste-Jean-Marie.	Rheims.	Marne.
Lefebvre-de-Sallay.	Pierre-Henri.	le Mans.	Sarthe.
Lejeune.	Marie-Remi-César.	Châlons.	Marne.
Lemarcis.	Jean-Marin.	Lheure.	Seine-Infér.
Lemit.	Louis.	Paris.	Seine.
Lenfumé.	Alphonse.	Troyes.	Aube.
Lerebours.	Jacques-Félix.	Saint-Hilaire du Harcourt.	Manche.
Lermier.	Jacques-Constant.	Arconnay.	Sarthe.
Leroy.	Jean-Denis.	Paris.	Seine.
Lherbette.	Adolphe-Charles.	Paris.	Seine.
Liadières.	Pierre-Chaumont.	Pau.	Basses-Pyrén.
Lindenmeyer.	Jean-Frédéric-Charles.	Grumbach.	Sarre.
Loret.	Louis-Marie-Constant.	Morlaix.	Finistère.
Luguet.	Achille-Antoine-Martin.	Compreignac.	Haute-Vienne.
Madelaine.	Joachim.	Evian.	Léman.
Mahieux.	Jean.	Bruxelles.	Dyle.
Malechard.	Charl.-Bernardin-Gabr.	Ste-Foi-lès-Lyon	Rhône.
Marcilhac.	Adolphe-Charl.-Martin.	Paris.	Seine.
Martin-Julvécourt.	Alexandre.	Nancy.	Meurthe.
Marty.	Joseph.	Noueilles.	Haute-Garonne
Melon de Pradou	Jean-Baptiste.	Tulle.	Corrèze.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Mercier.	Charles.	Arbois.	Jura.
Metayer.	Julien-Fidèle-Constant.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Michel - d'Anserville.	Ange-Gabriel-Porphire.	Anserville.	Oise.
Michelot.	Jean-Charles-Auguste.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Mieussens.	Roch.	Vic-sur-Losse.	Gers.
Mocquard.	Aimé.	Lannilis.	Finistère.
Monmartin.	Alexand.-Pierre-Franç.-Barthelemi.	Cailloux - sur - Fontaine.	Rhône.
Moreau.	Marie-Emiland-Bonav.-Auguste.	Louhans.	Saône-et-Loire.
Morin.	Nicolas.	Rouen.	Seine-Infér.
Moynier.	François-Joseph-Jean.	Ille.	Pyrén.-Orient.
Murat.	(N'a pas de prénoms.)	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Muthuon.	Louis-Marie.	Largentière.	Hautes-Alpes.
Néhou.	Adrien.	Andelys.	Eure.
Nether.	Charles-Marie.	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Ogée.	Félix-François.	Nantes.	Loire-Infér.
Olivier.	Albert-Joseph-Augustin.	Carpentras.	Vaucluse.
Patau.	George-François-Marc.	Vinça.	Pyrén.-Orient.
Pauzié-Banne.	J.-Henri-Pierre-Auguste	Montpellier.	Hérault.
Peloux.	Jean-Baptiste-Melchior.	Cuet-Montrevel	Ain.
Pérignon.	François-Fortuné.	Paris.	Seine.
Perreau.	Jules-Edme-Charles.	Paris.	Seine.
Perruchot.	Louis.	Dijon.	Côte-d'Or.
Planquette.	Jean-Louis.-Et.-Franç.	Cemi en Singlais	Calvados.
Rabaioye.	Pierre-Charles.	Paris.	Seine.
Redoutey.	André-Remi-Egalité.	Auxonne.	Côte-d'Or.
Rieffel (*).	François Xavier-Joseph.	Mayence.	Mont-Tonnerre.
Robert de Saint-Vincent.	Pierre-Gustave-Léopold	Leuze.	Jemmape.
Rocquancourt.	Jean-Thomas.	Saint-Vaast.	Calvados.
Ronmy.	Thomas-Ferdinand.	Rouen.	Seine-Infér.
Roullion.	Claude-Joseph.	Bernin.	Isère.
Rousset.	Charles.	Lyon.	Rhône.
Rouvrois.	François-Gabriel.	Saint-Mihiel.	Meuse.
Séhols.	Charles-Stanislas.	Keskastel.	Bas-Rhin.
Sibilet.	Pierre-Abel.	Larochefoucauld	Charente.
Simon.	Joseph.	Meslay.	Mayenne.
Soleirol.	Henri-Augustin.	Verdun.	Meuse.
Sorel.	Pierre-Louis-Honoré.	Le Hâvre.	Seine-Infér.
Surineau.	Louis-Charles-Théodore.	Luçon.	Vendée.

(*) Cet élève étant myope, a été reçu seulement comme pensionnaire, mais ne pourra concourir pour les services publics.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Tassain.	Nicolas.	Sarlat.	Dordogne.
Terson Paleville	Daniel-Casimir.	Paleville - Lastouzeilles.	Tarn.
Thiery.	Sébastien.	Verdun.	Meuse.
Thiry.	François Augustin.	Nancy.	Meurthe.
Urtin	César-Ernest.	Valence.	Drôme.
Vauquelin.	Jean-François.	Paris.	Seine.
Vergnaud.	Amand-Denis.	Orléans.	Loiret.
Vernety.	Etienne.	Saint-Germain-en-Laye.	Seine-et-Oise.
Vieux.	Pierre	Ste -Menehould	Marne.
Viquesnel.	François-Etienne-Gilles.	Paris.	Seine.
Voysin - Gartempe.	Philippe-Aristide.	Gueret.	Creuse.
Ythier.	Pierre-Marie-Thomas.	Auxerre.	Yonne.
Yver.	César-Jules.	Tonnerre.	Yonne.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Le jury présidé par S. Exc. M. le Gouverneur, et composé des deux examinateurs permanens MM. Legendre et Lacroix, et des deux examinateurs temporaires MM. Vauquelin et Malus, a arrêté, le 28 septembre 1810, les listes suivantes, par ordre de mérite; savoir :

Artillerie de terre. MM. Gazel, Réguis, Bachelay, Perreyve, Thiry, Delafuye, Franchessin, Lecourroyer, Olry, Gravelle, Jacquin, Floquet, Lecorbeiller, Lemasson, Asselin de Crèvecœur, Decayeu, Duffourc, Morlot, Goupil, Delavenne, Serres, Hercouet, Bonie, Tournaire, Caqueray-Fontenelle, Boistel-Duroyer, Pargoire, Soufflot, Froussard, Munier, Soulier, Delattre-d'Aubigny, Cartier, Surineau, Paqueron, Parès, Goussard, Durfort-Léobard, Gambier, Comynet, Poilleux, Cerf-Berr, Emon, Cotte, Griffet-Labaume (C. A.), Dufrayer, Falguière, Daridan, Godin, Vatrin, Gardeur-Lebrun, Baudreuil, Guenyveau, Dutertre, Dupré, Louuel, Tardu, Pâquet, Oury, Lanteri, Labrosse-Luuyt, Moyne, Raige, Ethéart, Roy, Huguenot *dit Lalance*, Vincent, Labatie, Jolivet de Riencourt, Cabannes-Laprade,

Jacquemont, Vivier-Lachaise, Rolland-Garagnol, Lerouge (Félix), O-Farrel, Lenfant, Dehaussy, Dadole, Plivard. . . . . 79.

Artillerie de mer. MM Aurioust-Beaujour, Devillers. . 2.

Génie militaire. MM. D'Artois, Paret, Noizet, Goureau, Perrot, Gilberton, Poupart, Boissière, Duché, Lesbros, Poncelet, Corrèze, Ghiappe, Hubert, Collas, Rudler, Gourier, Vallenet, Jubié, Savart, Vène, Simon, Casse, Sers, Boquet, Mermier, Sertour, Harel, Tiron . . . . 29.

Ponts et chaussées : MM. Josserand, Pouettre, Surville, Cuel, Le Rouge (P.-J.), Guillebon, Armand, Umpfenbach, Coriolis, Bélanger, Frimot, Dinet, Genieys, Courtois, Jouvin, Mary, Moneuze, Carbonazzi, Hurel, Noël, Bernard (H), Morin, Legraverend, Baudesson, Gensolen, Couturat, Demonet-Lamarck, Cousinery . . . . 28.

Ingénieurs-géographes : MM. Mareuse, Vuillet, Filhon, Durand. . . . . 4.

Mines : MM. Gargan, Burdin, Delseriès, Lefebvre (L.) 4.

Poudres et Salpêtres : MM. Desjardins, Lugaigne. . . . . . 2.

Troupes de ligne : M. Delafosse, nommé sous-lieutenant dans le 5e régiment d'infanterie de ligne . . . . 1.

Démissionnaires : MM. Beck (C.), Delalande, Desages, D'Heure, D'Espagnac (*), Doucet, Dufilhol, Laroze, Merland, Peyret, Saladin, Saucourt. . . . . 11.

Morts : MM. Ducasse, Laurenceot, Cauvet-Longrais. . 3.

Etat de situation des élèves de l'Ecole Polytechnique à l'époque du 1er novembre 1810, et résultat des opérations des jurys d'admission dans les services publics, de passage de la 2e à la 1ere division, et d'admission à l'Ecole.

L'Ecole étoit composée, au 1er novembre 1809, de 333 élèves,

SAVOIR :

1ere division.	156	333.
2e division	177	

(*) Nommé auditeur au Conseil-d'Etat.

Elle a perdu dans le cours de l'année

morts	1ere division	2	3	163.
	2e division	1		
démissionnaires	1ere division	3	11	
	2e division	8		
Passé dans la ligne sous-lieutenant			1	
Admis dans les services publics.				
Artillerie de terre			79	
Artillerie de mer			2	
Génie militaire			29	
Ponts et Chaussées			28	
Ingénieurs-géographes			4	
Mines			4	
Poudres et Salpêtres			2	

A la fin de l'année scholaire l'Ecole restoit composée de 170 élèves,

SAVOIR :

1ere division	2	170.
2e division	168	

Le Jury a pensé que, sur les 170 élèves qui composoient la 2e division, 157 étoient susceptibles de passer à la 1ere, et que 11 devoient faire une seconde année dans cette division. Il en résulte que la nouvelle 1ere division s'est trouvée composée de 159 élèves.

Ajoutant aux 170 élèves qui restent à l'Ecole les 167 qui ont été admis au concours de cette année, ci...... 167.

L'école s'est trouvée composée, au 1er novembre, de 337 élèves,

SAVOIR :

1ere division	159	337.
2e division	178	

§. V.

ACTES DU GOUVERNEMENT.

Paris, le 27 juillet 1810.

Le général Gassendi, chef de la division de l'artillerie au ministère de la Guerre, à M. le comte de Cessac, gouverneur de l'Ecole impériale Polytechnique.

M. le Comte, — J'ai mis sous les yeux du ministre, ainsi que Votre Excellence l'a désiré, les observations contenues dans la lettre qu'Elle m'a fait l'honneur de m'écrire le 21 de ce mois. Son Excellence les ayant trouvées fondées, a arrêté, le 26 de ce mois :

1°. Qu'à l'avenir les élèves des Poudres et Salpêtres seront tirés de l'Ecole Polytechnique seule ;

2°. Qu'elle fournira, d'après les examens de cette année, auxquels l'un des administrateurs généraux des Poudres et Salpêtres assistera, ainsi qu'à ceux des années suivantes, les deux élèves dont leur administration a besoin, en prévenant toutefois les aspirans qu'ils devront justifier, avant l'examen, qu'ils sont en état de fournir le cautionnement à l'époque où il sera exigé d'eux, à défaut de quoi ils resteront commissaires-adjoints ;

3°. Qu'attendu que le concours public a été annoncé pour le 1er. août prochain, et qu'il peut y avoir des concurrens, autres que les élèves de l'Ecole Polytechnique, l'examen de ces candidats particuliers sera fait par M. Legendre, examinateur de l'artillerie, et qu'il en sera reçu un comme élève surnuméraire, s'il fait preuve des connoissances exigées.

Son Excellence me charge, M. le Comte, de vous faire part de ces dispositions, et de vous prévenir qu'il vient d'être écrit en conséquence à MM. les administrateurs généraux des Poudres et Salpêtres, et à M. Legendre. J'ai l'honneur d'être, etc.

EXTRAIT *du décret impérial contenant Organisation du Corps impérial des Ingénieurs des Mines.*

Au palais des Tuileries, le 18 novembre 1810.

NAPOLÉON, EMPEREUR DES FRANÇAIS, etc.

TITRE Ier. — *Composition du Corps impérial des Ingénieurs des Mines.* — ART. 1er. Le corps impérial des ingénieurs des mines sera divisé en grades de la manière suivante : Inspecteurs-généraux, inspecteurs divisionnaires, ingénieurs en chef, ingénieurs ordinaires, aspirans, élèves.—Art. 2. Il y aura dès-à-présent trois inspecteurs généraux, cinq inspecteurs divisionnaires, quinze ingénieurs en chef, trente ingénieurs ordinaires, dix aspirans, vingt-cinq élèves. — Art. 3. Le nombre des ingénieurs en chef et ordinaires pourra être augmenté successivement et dans la proportion des besoins du service, sur le rapport de notre ministre de l'intérieur. — Art. 4. Les ingénieurs en chef, les ingénieurs ordinaires et les élèves seront divisés en deux classes. Deux cinquièmes appartiendront à la première classe, et trois cinquièmes à la seconde. — Art. 5. Lorsque le besoin du service exigera que des ingénieurs en chef de première classe, pour des cas spéciaux, aient sous leurs ordres un ou plusieurs ingénieurs en chef, ils prendront, pendant la durée de ces fonctions, le titre d'*ingénieurs en chef directeurs*. — Art. 6. A la première organisation, et pour cette fois seulement, notre ministre de l'intérieur pourra admettre quatre élèves,

pris dans les départemens réunis, sans qu'ils soient tenus de justifier de leur cours d'étude à l'Ecole Polytechnique. Toutefois ils subiront un examen devant les inspecteurs généraux des mines, et devront en obtenir un certificat de capacité. — Art. 7. Les deux inspecteurs particuliers des carrières sous Paris, et l'ingénieur géomètre en chef employé aux travaux de ces carrières, seront considérés comme faisant partie du corps impérial des mines. Les grades leur seront assignés par notre ministre de l'intérieur. Ils continueront d'être payés par la ville de Paris. — Art. 8. A l'avenir, le remplacement de ces ingénieurs, ainsi que celui de l'inspecteur général des carrières, actuellement ingénieur en chef des mines, s'opérera par des individus du corps impérial des mines.

TITRE IV. — *Nomination et Avancement.* — Art. 49. Les Elèves des mines sont pris parmi ceux de l'Ecole Polytechnique qui auront complété leurs études et rempli les conditions exigées; le directeur général en proposera, et notre ministre de l'intérieur en déterminera le nombre chaque année. — Art. 50. Les places d'aspirans du corps des ingénieurs des mines seront données aux élèves de première classe, suivant le rang qu'ils auront aux écoles, en raison de leurs progrès et de leur application. — Art. 51. Lorsqu'il y aura lieu à une ou plusieurs nominations, le premier ou les premiers de la première classe seront choisis, sur la proposition du directeur général, par notre ministre de l'intérieur. — Art. 52. Les ingénieurs ordinaires sont pris parmi les aspirans : ils sont nommés par nous, sur le rapport du ministre et de l'avis du directeur général. Art. 53. Les ingénieurs en chef sont pris parmi les ingénieurs ordinaires de première classe, sans exclusion de la seconde : ils sont nommés par nous, sur le rapport du ministre et l'avis du directeur général. — Art. 54. La promotion d'une classe à l'autre, relativement aux ingénieurs en chef et ordinaires, est faite par notre ministre de l'intérieur, sur le rapport du directeur général. — Art. 55. Les inspecteurs divisionnaires seront pris parmi les ingénieurs en chef des deux classes, et nommés par nous, sur le rapport du ministre, d'après l'avis du directeur général. — Art. 56. Les inspecteurs généraux seront pris parmi les inspecteurs divisionnaires et les ingénieurs en chef de la première classe : ils seront nommés par nous, sur le rapport du ministre et sur l'indication du directeur général.

TITRE VI. §. II. — *Uniforme du Corps.* — Art. 72. L'uniforme des ingénieurs des mines de tout grade sera le même que celui des ingénieurs de tout grade des ponts-et-chaussées, déterminé par notre décret du 7 fructidor an XII, sauf les exceptions ci-après : Le collet et les paremens de l'habit seront en velours bleu impérial. Les boutons auront pour légende : *Corps impérial des Mines*; au centre, un aigle. Il leur est interdit de rien changer à l'uniforme prescrit pour chaque grade.

EXTRAIT *du Décret impérial contenant Organisation du Corps des Ingénieurs des Ponts-et-Chaussées.*

Au Quartier-général impérial du Pont-de-Brique, près Boulogne, le 7 fructidor an 12.

NAPOLÉON, EMPEREUR DES FRANÇAIS, etc.

TITRE Ier. — *Formation du Corps des Ingénieurs des Ponts-et-Chaussées.* — Art. 1er. Le corps des ingénieurs des ponts-et-chaussées sera composé, à l'avenir, de cinq cent trente-sept individus, divisés en grades de la manière qui suit : 5 Inspecteurs généraux. — 15 Inspecteurs divisionnaires. — 2 adjoints. — 134 Ingénieurs en chef. — 306 Ingénieurs ordinaires. — 15 Aspirans. — 60 Elèves.

Art. 2. Les cent trente-quatre ingénieurs en chef sont divisés en deux classes : quatre-vingt-neuf de première classe ; quarante-cinq de seconde classe.

Art. 3. Les trois cent six ingénieurs ordinaires seront divisés en deux classes : 139 de première classe ; 167 de seconde classe.

Art. 4. Lorsque des ingénieurs en chef de première classe se trouveront chargés de grands travaux de navigation, d'ouverture de routes, ou autres, qui mettront sous leurs ordres un ou plusieurs ingénieurs en chef, ils auront le titre d'*Ingénieurs directeurs* pendant la durée des travaux.

TITRE V. — Art. 22. L'uniforme des ingénieurs des ponts-et-chaussées sera : habit français, de drap bleu national, doublé de même, boutonné sur la poitrine, et dégagé sur les cuisses. Un seul rang de boutons sur le côté droit de l'habit ; poches en travers et à trois pointes avec trois boutons, un bouton à la naissance des plis, et deux dans la longueur ; collet renversé, de drap cramoisi, monté sur un collet droit, de huit centimètres de hauteur. La manche de l'habit coupée au-dessous, avec paremens de drap cramoisi, garni de trois petits boutons. Veste chamois, boutonnée par douze petits boutons ; culotte bleue. Boutons surdorés avec un fond uni. Autour du bouton les mots : *Ingénieurs des Ponts-et-Chaussées*. Chapeau uni à la française, avec ganse en or pareille à la baguette à fleurons, la ganse arrêtée par un petit bouton ; la cocarde, et une arme. — Art. 23. Les grades seront distingués par une broderie en or, formée d'une branche d'olivier, enroulée d'un ruban et portée par une simple baguette, ayant ensemble une largeur de trente-cinq millimètres.

TITRE VI. — *Nomination et Avancement*. — Art. 24. Les soixante élèves des Ponts-et-Chaussées sont pris parmi ceux de l'Ecole Polytechnique qui, ayant complété leurs études et rempli les conditions exigées par les réglemens des deux écoles, auront été choisis par l'administration de l'École Polytechnique. Art. 25. Les quinze places d'aspirans des Ponts-et-Chaussées seront données aux élèves de la première classe, dans l'ordre de la primauté de leurs degrés. Lorsqu'il y aura lieu à une ou plusieurs nominations, le premier ou les premiers de la première classe seront, à cet effet, désignés par le directeur de l'école, au directeur-général, qui les nommera ou qui décidera si des raisons de convenance de service n'exigent pas une exception. Le directeur-général déterminera leur destination, et leur donnera une commission sous l'approbation du ministre de l'intérieur. — Art. 26. Les ingénieurs ordinaires sont pris parmi les aspirans ; ils sont nommés par l'Empereur, sur l'indication du directeur-général, et sur le rapport du ministre de l'intérieur. — Art. 27. Les ingénieurs en chef sont pris parmi les ingénieurs ordinaires de première classe, sans exclusion de la seconde ; ils sont nommés par l'Empereur, sur l'indication du directeur général et sur le rapport du ministre de l'intérieur. — Art. 28. La promotion d'une classe à l'autre, relativement aux ingénieurs ordinaires et aux ingénieurs en chef, s'exécute par le ministre de l'intérieur, sur le rapport du directeur-général. — Art. 29. Les inspecteurs divisionnaires seront pris parmi les ingénieurs en chef de première classe, sans exclusion de la seconde ; ils seront nommés par S. M. l'Empereur, sur l'indication du directeur-général et sur le rapport du ministre de l'intérieur. — Art. 30. Les inspecteurs-généraux sont pris parmi les inspecteurs divisionnaires et les ingénieurs en chef des deux classes ; ils seront nommés par S. M. l'Empereur, sur l'indication du directeur-général et sur le rapport du ministre de l'intérieur.

TITRE X. — *Ecole des Ponts-et-Chaussées*. — Art. 59. L'école nationale et d'application des Ponts-et-Chaussées, établie en 1747, et réorganisée par la loi de 1791, sera dirigée par un inspecteur-général, sous la surveillance et administration du directeur-général des Ponts-et-Chaussées. — Art. 60. Les fonctions du directeur de l'école sont déterminées par le

présent réglement, et par le réglement spécial pour cette école. Il est en même temps garde des plans, projets et modèles servant à l'instruction des élèves. — Art. 61. Le directeur de l'école aura immédiatement sous lui un inspecteur ayant le grade d'ingénieur en chef. — Art. 62. Le directeur de l'école, l'inspecteur, les trois professeurs, et deux inspecteurs-généraux qui seront désignés, formeront le conseil de l'école, présidé par le directeur-général des Ponts-et-Chaussées, et, en l'absence, par le directeur de l'école. Dans ce conseil, qui se réunira au moins une fois par mois, se traiteront toutes les affaires relatives à la discipline et à l'administration de l'école, à l'instruction et au personnel des élèves. Ses délibérations seront soumises à l'approbation du directeur-général. — Art. 63. Le nombre des élèves des Ponts-et-Chaussées tirés de l'École Polytechnique conformément à la loi du 30 vendémiaire an 4, est fixé à soixante, divisés en trois classes de 20 chacune. — Art. 64. Chaque élève recevra un traitement annuel, réglé ainsi qu'il suit :

Ceux de première classe................	900 fr.
Ceux de deuxième classe................	800
Ceux de troisième classe................	700

— Art. 65. Les élèves pourront être envoyés en campagne dans le cours de floréal ou prairial de chaque année, et jamais avant cette époque. Ils recevront, dans ce cas, le traitement des aspirans, et ne seront pas portés sur les états d'émargement de l'école pendant tout le temps de leur absence. Les élèves ainsi envoyés au-dehors seront tenus d'être rentrés à l'école le 1er frimaire, jour fixé pour la reprise des cours et des exercices, à moins que des raisons majeures n'aient déterminé le directeur-général à approuver une plus longue absence. — Art. 66. Le mode d'enseignement, celui d'avancement dans chaque classe suivant l'ordre des degrés, et d'une classe à l'autre, et enfin la police intérieure de l'école, seront fixés par un réglement particulier. — Art. 67. L'élève qui, après trois ans d'école, n'aura pas fait le travail exigé, et donné des preuves d'aptitude nécessaires pour être reçu aspirant, cessera d'être compris sur le tableau : il en sera de même de ceux qui ne suivront pas avec exactitude les cours et les exercices, ou qui tiendront une conduite répréhensible. Ces exclusions auront lieu sur la décision du ministre de l'intérieur, après la délibération du conseil de l'école. — Art. 68. Les professeurs seront au nombre de trois. Le premier enseignera la stéréotomie appliquée à la coupe des pierres et des bois, et la pratique des constructions, comprenant celle des routes et des travaux hydrauliques. Le deuxième enseignera l'architecture civile et les arts du dessin qui se rapportent aux constructions en général. Le troisième enseignera la mécanique appliquée. Ces professeurs seront pris parmi les ingénieurs en chef ou ingénieurs ordinaires qui auront été jugés capables par le conseil de l'école. Ils recevront le traitement de leur grade et de leur classe. — Art. 69. Il sera pris, sur le produit de la taxe d'entretien des routes, une somme annuelle de soixante-douze mille quatre cents francs pour les dépenses de l'école, consistant en traitement des élèves et d'un secrétaire, salaire des garde-salles et du portier, prix à distribuer à la fin de l'année, frais de chauffage, lumière, etc., achat de livres d'art, d'instrumens, et confection de modèles, et en indemnités à accorder aux professeurs pour les travaux extraordinaires relatifs à l'instruction dont ils pourront être chargés après la cessation des cours, sur la délibération du conseil de l'école, approuvée par le directeur-général.

Un décret du 20 février 1811 augmente les cadres du Corps impérial des Ponts-et-Chaussées de deux inspecteurs divisionnaires, sept ingénieurs en chef de première classe, six ingénieurs en chef de seconde classe, onze ingénieurs ordinaires de première classe, onze ingénieurs ordinaires de seconde classe.

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. Hachette.

Tome II, 3e. *cahier*, *pag.* 187 — 312, 5 *planches*; *Mai* 1811.

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS CE CAHIER.

§. I. — *Mathématiques.*

Sur la projection stéréographique; solution d'un problême de trigonométrie sphérique; par M. Hachette.

Sur la transformation des coordonnées obliques en d'autres coordonnées obliques; par M. Hachette.

Sur les Polyèdres; par M. Cauchy.

Sur la courbe d'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, tracée par la ligne droite et le cercle; par M. Chapuy, élève.

Extrait de l'*Almageste de Ptolémée;* par M. Brianchon, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, officier d'artillerie.

Sur le parallélipipède et la pyramide triangulaire; par M. Monge.

Propriétés des centres de gravité; par M. Blondat, élève.

Solutions de plusieurs problêmes de géométrie; par MM. Poncelet et Delavenne, élèves admis cette année à l'école de l'artillerie et du génie.

Solution d'un problême de mécanique; par M. Dubois Aymé, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, Directeur des Douanes.

Algèbre. — Résolution de deux équations à deux inconnues; par M. Lefébure, répétiteur adjoint à l'Ecole Polytechnique.

Questions proposées au concours général des Lycées de Paris, de l'an 1810.

---

§. II. — *Sciences Physiques.*

De la double réfraction de la lumière; de sa polarisation. — Sur l'évaporation de l'eau dans le vide; par M. Hachette.

Sur le nautile marin.

---

§. III.

Annonces d'Ouvrages.

---

§. IV. — *Personnel.*

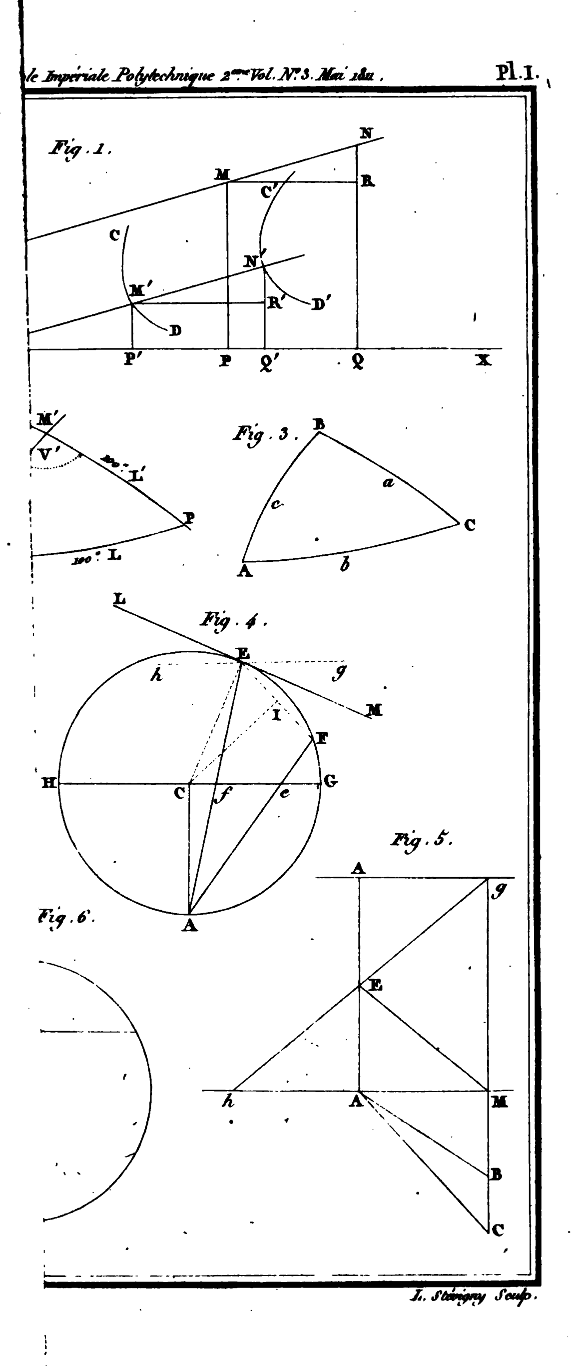
Liste des Elèves admis, en 1810, à l'Ecole Polytechnique.

Le nombre total des Elèves admis à l'Ecole depuis son établissement est de 2473.

---

§. V.

Actes du Gouvernement relatifs aux services publics.


Fig. 1.
N
M
R
C'
C
N'
M'
R'
D'
D
P'
P
Q'
Q
X
M'
V'
L'
P
100°. L
Fig. 3.
B
a
c
C
A
b
L
Fig. 4.
E
h
g
M
I
F
H
C
f
e
G
A
Fig. 5.
A
g
E
h
A
M
B
C
Fig. 6.
L. Stavigny Sculp.

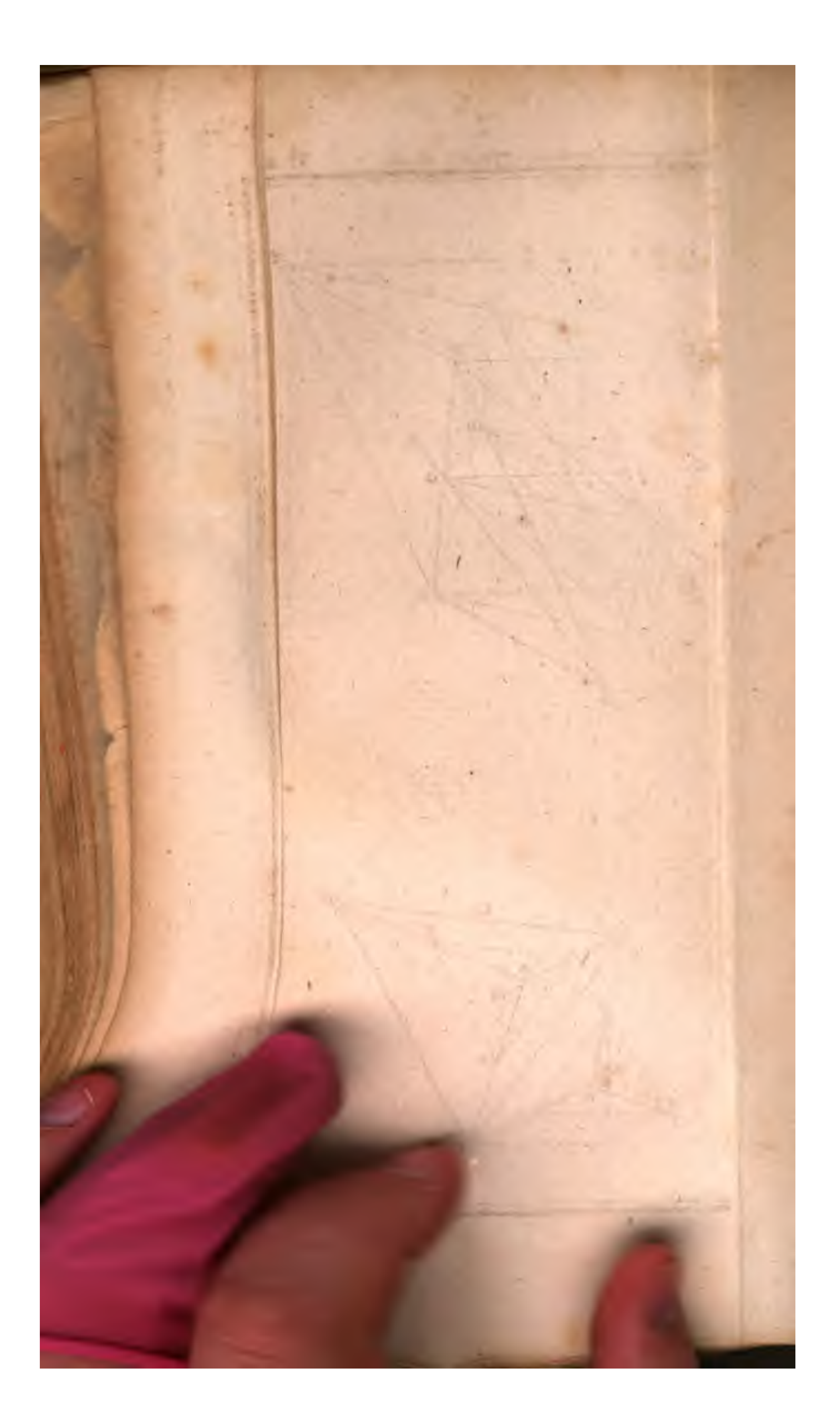
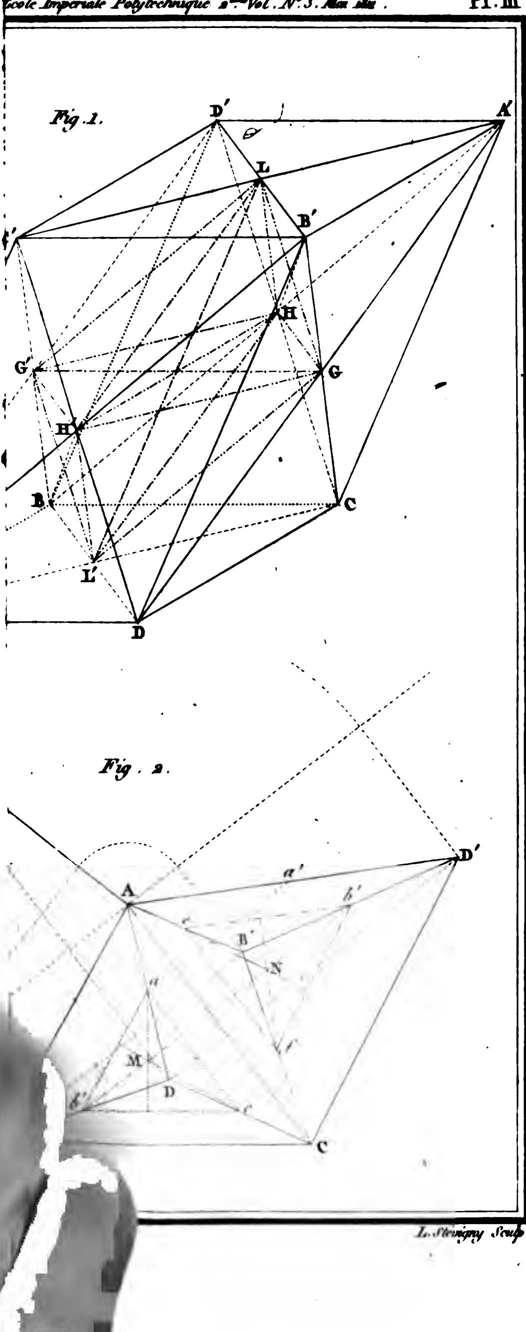
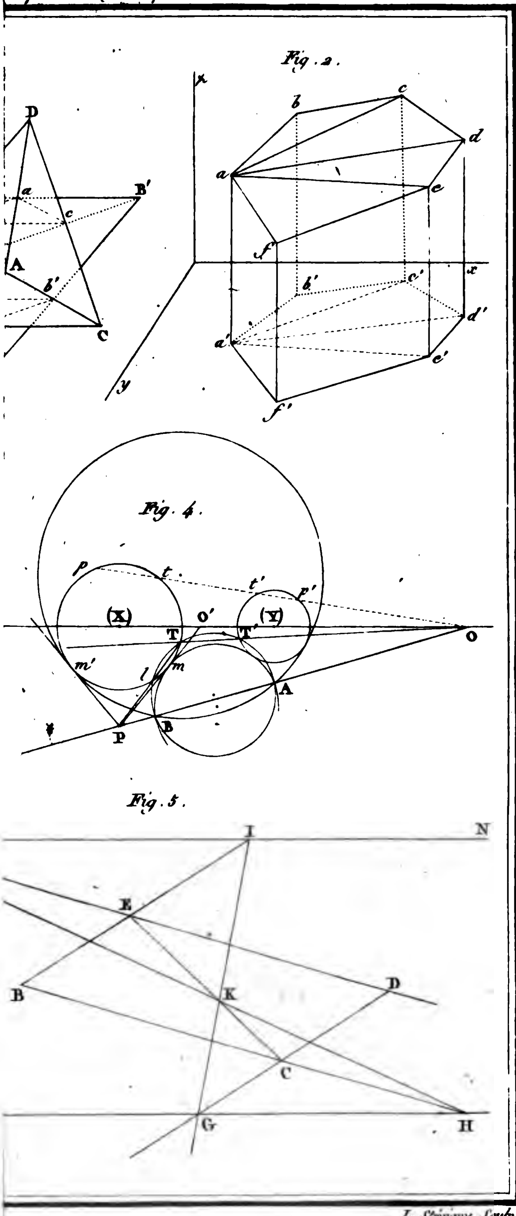


Fig. 1.

Fig. 2.

L. Sterigny Sculp.


Fig. 1.
D′
A′
L
B′
H
G′
G
H′
B
C
L′
D
Fig. 2.
D′
a′
A
b′
c′
B′
N
a
M
D
b″
c
C
L. Sterigny Sculp.



L. Steingny Sculp.

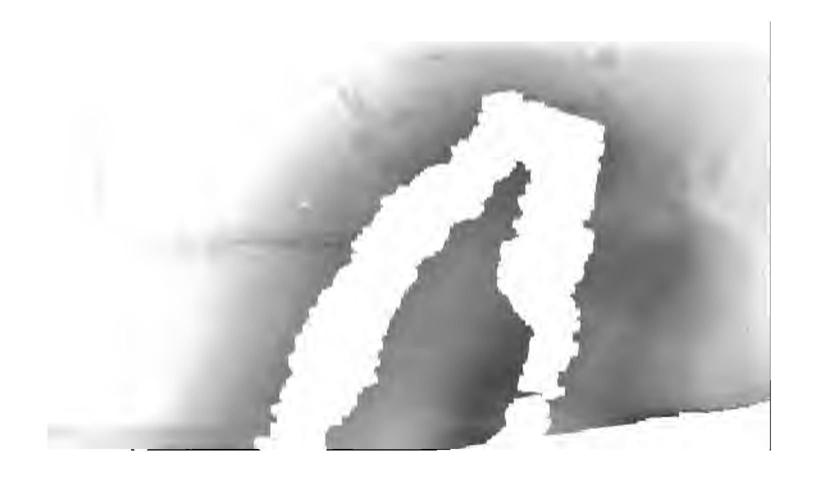


Fig. 1. a.

Fig. 1. c.

Dessin A.

Fig. 1. b.

Fig. 3.

L. Sévigny Sculp.

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

N°. 4. *Juillet* 1812. (IIe. Volume.) (*).

§. I.

Des Surfaces du second degré.

M. MONGE *à M.* HACHETTE (22 *mars* 1812).

Vous aviez proposé aux élèves de l'Ecole Polytechnique de trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens de l'équation générale des surfaces du second degré, pour que la surface soit de révolution : trois élèves, MM. Urban, Merle et Mondot, ont très-bien résolu la question ; et en publiant leurs solutions, vous avez prouvé les progrès qu'ils avoient faits dans la géométrie et l'analyse. Mais je suis surpris de ce que, pour la question dont il s'agit, les élèves de l'Ecole Polytechnique, qui connoissent si bien l'équation des surfaces de révolution, n'ont pas fait usage de cette équation générale, qui semble n'avoir pas d'autre destination, et qui les auroit dispensés de toute considération géométrique nouvelle. Je vais le faire.

I. Je suppose, comme M. Mondot, que la surface soit rapportée à son centre comme origine, et que son équation soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2(Dyz+Ezx+Fxy)=H.$$

Si cette surface est de révolution, son axe de révolution doit

(*) Il y a une erreur de pagination dans le troisième cahier qui précède celui-ci. La première page de ce cahier est cotée 187 : elle devoit être marquée du nombre 137.

passer par le centre, et les équations de cet axe sont de la forme

$$x = mz$$

$$y = nz$$

dans lesquelles les constantes m, n, sont encore indéterminées. Or, les élèves savent que l'équation aux différences partielles de la surface de révolution autour de cet axe est

$$p(nz - y) - q(mz - x) + nx - my = o;$$

il faut donc que cette équation soit satisfaite par celle de la surface du second degré.

Si l'on différencie aux différences partielles l'équation de la surface du second degré, pour avoir les valeurs de p et de q, on a

$$Ax + Fy + Ez + p\{Ex + Dy + Cz\} = o,$$

$$Fx + By + Dz + q\{Ex + Dy + Cz\} = o;$$

et si l'on substitue pour p et q ces valeurs dans l'équation des surfaces de révolution, on obtient

$$-(nz - y)(Ax + Fy + Ez) + (mz - x)\{Fx + By + Dz\}$$

$$+(nx - my\{Ex + Dy + Cz\} = o$$

qui, ordonnée par rapport aux trois coordonnées x, y, z, devient

$$\left.\begin{array}{l} x^2(En - F) \\ -y^2(Dm - F) \\ +z^2(Dm - En) \\ +yz\{(B - C)m - Fn + E\} \\ +zx((C - A)n + Fm - D\} \\ +xy\{Dn - Em + A - B\} \end{array}\right\} = o$$

Cette équation appartient à une troisième surface qui passe par la courbe de contact de la surface de révolution et de celle du second degré. Mais il faut que ces deux dernières surfaces se touchent par-tout, et par conséquent se confondent; donc la

dernière équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y, z, c'est-à-dire indépendamment de ces valeurs; donc il faut que les six coefficiens soient chacun égal à zéro, ou que l'on ait en même temps les six équations

$$En - F = 0$$
$$Dm - F = 0$$
$$Dm - En = 0$$
$$(B - C)m - Fn + E = 0$$
$$(C - A)n + Fm - D = 0$$
$$Dn - Em + A - B = 0$$

Mais, de ces six équations, les deux premières comportent la troisième, et servent à déterminer les valeurs de m et n, qui sont

$$m = \frac{F}{D}, \; n = \frac{F}{E}$$

et par conséquent à déterminer la direction de l'axe de révolution; de plus, si l'on met pour m et n leurs valeurs dans les trois dernières, elles deviennent

$$(A - B)DE + F(D^2 - E^2) = 0$$
$$(C - A)FD + E(F^2 - D^2) = 0$$
$$(B - C)EF + D(E^2 - F^2) = 0$$

dont deux quelconques comportent encore la troisième.

Donc, la surface du second degré sera de révolution, lorsque deux quelconques des trois dernières équations seront satisfaites; et les équations de l'axe de révolution seront

$$Dx = Fz, \; Ey = Fz$$

ce qui est conforme aux résultats donnés par MM. Urban, Merle et Mondot.

II. On peut employer de la même manière l'équation aux différences partielles de toute autre surface générale; je vais en donner quelques exemples.

Posons qu'il s'agisse de trouver la relation qui doit exister entre les coefficiens de l'équation de la surface du second

degré, pour que cette surface soit cylindrique. On sait que si les équations de la droite menée par l'origine, et à laquelle la génératrice de la surface est constamment parallèle, sont

$$x = mz, \ y = nz$$

l'équation générale des surfaces cylindriques est

$$mp + nq = 1.$$

Si l'on substitue pour p et q les valeurs que donne l'équation des surfaces du second degré, et que nous avons données dans l'article précédent, on a

$$m\{Ax+Fy+Ez\}+n\{Fx+By+Dz\}+Ex+Dy+Cz=0$$

qui, ordonnée par rapport aux coordonnées x, y, z, devient

$$x\{Am+Fn+E\}+y\{Fm+Bn+D\}+z\{Em+Dn+C\}=0.$$

Cette équation doit être satisfaite, indépendamment des valeurs de x, y, z; on aura donc les trois équations

$$Am + Fn + E = 0$$
$$Fm + Bn + D = 0$$
$$Em + Dn + C = 0$$

dont deux quelconques, par exemple les deux premières, détermineront les valeurs suivantes de m et n,

$$m(AB - F^2) + BE - DF = 0$$
$$n(AB - F^2) + AD - EF = 0$$

et qui, par l'élimination de m et n, donneront l'équation

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = ABC + 2DEF$$

qui doit avoir lieu entre les coefficiens.

Ainsi, la surface du second degré sera cylindrique, lorsque les coefficiens de l'équation générale satisferont à l'équation précédente; et alors la direction de la droite génératrice du cylindre sera déterminée par les valeurs de m et n.

III. S'il s'agit de trouver la relation qui doit exister entre les coefficiens de la surface du second degré pour que cette sur-

face soit conique, on remarquera d'abord que le centre, c'est-à-dire le sommet, de la surface conique sera placé à l'origine.

Or, l'équation des surfaces coniques, dont le sommet est à l'origine, est

$$z-px-qy=0$$

Substituant donc pour p et q leurs valeurs prises dans l'équation de la surface du second degré, on aura

$$x\{Ax+Fy+Ez\}+y\{Fx+By+Dz\}+z\{Ex+Dy+Cz\}=0$$

qui, ordonnée par rapport aux coordonnées, devient

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2\{Dyz+Ezx+Fxy\}=0$$

et qui doit être satisfaite. Mais cette équation n'est autre chose que le premier membre de l'équation des surfaces du second degré, et ne peut subsister à moins que le second membre soit aussi égal à zéro. Donc la surface du second degré sera conique, lorsque son dernier terme sera nul, c'est-à-dire lorsqu'on aura $H=0$. Ce que l'on savoit déjà.

IV. Pour terminer, je vais chercher les relations qui doivent exister entre les coefficiens de la surface du second degré, pour que cette surface soit développable.

On sait que l'équation générale des surfaces développables est

$$rt-s^2=0$$

il faut donc différencier partiellement les valeurs de p et q qui appartiennent à la surface du second degré, pour avoir celles de r, s, t. Cette différenciation donne

$$\begin{aligned}
&A+2Ep+Cp^2 &&+r\{Ex+Dy+Cz\}=0.\\
&F+Eq+Dp+Cpq &&+s\{Ex+Dy+Cz\}=0.\\
&B+2Dq+Cq^2 &&+t\{Ex+Dy+Cz\}=0.
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs de r, s, t, dans $rt-s^2=0$, on a

$$\{A+2Ep+Cp^2\}\{B+2Dq+Cq^2\}-\{F+Eq+Dp+Cpq\}^2=0$$

qui, ordonnée par rapport aux deux variables p, q, devient

$$\left.\begin{aligned}
&p^2(BC-D^2)+q^2(CA-E^2)+AB-F\\
&+2\{pq(DE-CF)+p(BE-DF)+q(AD-EF)\}
\end{aligned}\right\}=0$$

Substituant enfin pour p et q, leurs valeurs en x, y, z, que nous avons données, art. I, on a

$$(M)\quad \left.\begin{array}{r} \{Ax+Fy+Ez\}^2(BC-D^2) \\ +\{Fx+By+Dz\}^2(CA-E^2) \\ +\{Ex+Dy+Cz\}^2(AB-F^2) \\ +2\{Ax+Fy+Ez\}\{Fx+By+Dz\}(DE-CF) \\ +2\{Ex+Dy+Cz\}\{Ax+Fy+Ez\}(DF-BE) \\ +2\{Fx+By+Dz\}\{Ex+Dy+Cz\}(EF-AD) \end{array}\right\} = 0$$

équation qui doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs x, y, z, pour que la surface du second degré soit développable : or, si l'on développe cette équation, on reconnoît facilement qu'elle est composée des deux facteurs

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2(Dyz+Ezx+Fxy)=0$$
$$AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF\qquad =0$$

qui peuvent avoir lieu indépendamment l'un de l'autre ; de plus, le premier de ces facteurs est le premier membre de l'équation des surfaces du second degré, et se réduit à $H=0$, donc la surface du second degré sera développable dans les deux cas suivans,

1°. Lorsqu'on aura

$$H=0,$$

2°. Lorsqu'on aura

$$AD^2+BE^2+CF^2-ABC-2DEF=0$$

ce qui reproduit le cas des surfaces cylindriques et celui des surfaces coniques, que nous avons traités, art. II et III.

Enfin la surface du second degré sera encore développable lorsque l'équation (M) sera satisfaite, indépendamment des valeurs de x, y, z, ce qui aura lieu lorsqu'on aura les six équations suivantes,

$$BC-D^2=0,\quad CA-E^2=0,\quad AB-F^2=0,$$
$$DE-CF=0,\quad EF-AD=0,\quad FD-BE=0.$$

Or, il est facile de voir que si les trois équations de la première ligne ont lieu, celles de la seconde ligne s'ensuivent nécessairement ; donc la surface du second degré sera encore développable, lorsqu'on aura les trois équations

$$BC - D^2 = 0$$
$$CA - E^2 = 0$$
$$AB - F^2 = 0$$

et alors son équation deviendra

$$\{x\sqrt{A} + y\sqrt{B} + z\sqrt{C}\}^2 = H,$$

qui appartient au système de deux plans parallèles entr'eux ; ce qui est un cas très-particulier des surfaces cylindriques.

Des Propriétés générales des Surfaces du second degré.

M. Monge doit publier, dans le prochain cahier du Journal de l'École Polytechnique, un mémoire sur quelques propriétés générales des surfaces du second degré; nous allons en extraire les principaux résultats, sans en rapporter les démonstrations.

I. Lorsque deux surfaces quelconques du second degré sont concentriques, il y a toujours dans chacune d'elles trois diamètres conjugués, dont les directions sont les mêmes que celles de trois diamètres conjugués considérés dans l'autre ; en sorte que, si l'on circonscrit à chacune de ces surfaces le parallélipipède formé sur les trois diamètres conjugués dont il s'agit, ces deux parallélipipèdes, qui ne seront point semblables entre eux, seront néanmoins tels, que toutes les faces de l'un seront respectivement parallèles aux faces de l'autre.

On peut donner le nom de *droites diamétrales conjuguées communes*, aux trois directions communes de ces six diamètres considérés deux à deux.

II. Si l'on rapporte les deux surfaces concentriques à leurs trois droites diamétrales conjuguées communes par des coordonnées qui soient respectivement parallèles à ces droites, leurs équations seront symétriques, et de la forme

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = 1 \text{ pour l'une,}$$
$$\text{et } A'\,x^2 + B'\,y^2 + C'\,z^2 = 1 \text{ pour l'autre.}$$

Par conséquent l'intersection des deux surfaces sera toujours comprise en même temps sur les surfaces de trois cylindres qui auront pour bases des sections coniques, et qui seront parallèles aux trois droites diamétrales conjuguées communes : en sorte que les deux surfaces du second degré et les trois surfaces cylin-

driques se couperont toutes cinq dans la même intersection commune.

Cela fournit une construction des trois droites diamétrales conjuguées communes, qui deviennent les trois axes rectangulaires de l'une des deux surfaces, lorsque l'autre est celle d'une sphère.

III. Les trois droites diamétrales conjuguées communes ne jouissent pas toutes trois des mêmes propriétés. Pour deux de ces droites, si les diamètres des deux surfaces qui se trouvent sur l'une d'elles sont égaux entr'eux, les surfaces se touchent dans deux points diamétralement opposés, et n'ont pas d'autres points communs : pour la troisième, si les diamètres des deux surfaces sont égaux entr'eux, non-seulement les surfaces se touchent en deux points diamétralement opposés ; mais encore elles se coupent dans le système de deux courbes planes pour lesquelles les deux points de contact des surfaces sont deux points d'intersection.

Cela oblige à distinguer les trois droites diamétrales conjuguées communes en deux *extrêmes* et une *moyenne*.

IV. Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les deux surfaces quelconques du second degré ne sont pas concentriques, et quelque part que soient placés leurs centres, il y a toujours dans chacune d'elles trois diamètres conjugués, qui sont respectivement parallèles à trois diamètres conjugués considérés dans l'autre. Les deux surfaces n'en ont pas moins trois droites diamétrales conjuguées communes ; mais ces trois droites ne contiennent plus effectivement, comme dans le premier cas, les deux diamètres conjugués respectifs : elles leur sont simplement parallèles.

En sorte que, si l'on rapporte les deux surfaces à ces trois droites diamétrales par des coordonnées qui soient respectivement parallèles à ces droites, et en nommant a, b, c, les trois distances des deux centres mesurées dans les sens des coordonnées, les équations des deux surfaces seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

pour celle dont le centre est placé à l'origine,

et $A'(x-a)^2 + B'(y-b)^2 + C'(z-c)^2 = 1$

pour l'autre.

De ces trois droites diamétrales conjuguées communes, deux sont extrêmes, tandis que l'autre est moyenne.

V. Lorsque deux surfaces quelconques se touchent en deux points, la corde commune qui passe par les deux points de contact est toujours parallèle à l'une des trois droites diamétrales conjuguées communes : cette droite diamétrale est une des extrêmes, si les deux surfaces n'ont d'autres points communs que leurs deux points de contact; elle est, au contraire, la droite diamétrale moyenne, si les deux surfaces se coupent en même temps qu'elles se touchent, et alors l'intersection est composée du système de deux courbes planes pour lesquelles les deux points de contact des surfaces sont deux points d'intersection.

Dans les deux cas, le plan mené par les centres des deux surfaces et par le milieu de la corde commune est le plan diamétral commun, opposé à la corde commune : et de plus, les deux plans tangens communs aux deux surfaces et menés par les deux points de contact se coupent dans une droite qui est comprise dans ce plan diamétral.

VI. Deux surfaces quelconques du second degré étant données, si 1°. leurs centres sont placés sur une même droite diamétrale conjuguée commune extrême; et si 2°. les sections faites dans les deux surfaces par le plan diamétral opposé à cette droite diamétrale commune, sont semblables entr'elles et semblablement placées, l'intersection des deux surfaces est composée du système de deux courbes planes du second degré, semblables entr'elles, semblablement placées, et dont les deux plans sont parallèles au plan diamétral, et par conséquent parallèles entre eux. La distance de ces deux plans dépend alors de celle des deux centres et du rapport commun qui existe entre les dimensions homologues des sections semblables faites par le plan diamétral.

Si, de plus, le rapport entre les dimensions homologues des sections semblables est tel, que la distance de ces deux plans soit nulle, les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre, c'est-à-dire qu'elles se touchent dans une courbe. Cette courbe est toujours plane, et son plan est parallèle au plan diamétral opposé à la droite diamétrale menée par les deux centres.

Deux surfaces du second degré ne peuvent être circonscrites l'une à l'autre, à moins que ces conditions soient toutes trois satisfaites.

VII. Lorsque deux surfaces quelconques du second degré sont circonscrites à une même troisième surface du second degré, elles se coupent toujours dans le système de deux courbes planes du second degré.

Les plans de ces deux courbes se coupent toujours dans la même droite que les plans des courbes de contact des deux sur-

faces avec la troisième, et cette droite est parallèle à la droite diamétrale conjuguée moyenne commune aux deux surfaces.

Les deux courbes planes de l'intersection et les deux courbes planes de contact des deux surfaces avec la troisième passent toutes quatre par deux mêmes points qui sont en même temps deux points de contact communs aux trois surfaces.

Enfin, en regardant le systême de deux plans comme une surface du second degré, les cinq surfaces du second degré suivantes, savoir,

Les deux surfaces circonscrites à la même troisième,

Le systême des deux plans de leurs courbes de contact avec la troisième,

Le systême des deux plans de leur intersection mutuelle,

Et le systême des deux plans tangens communs aux trois surfaces, ont toutes les mêmes droites diamétrales conjuguées communes; et la moyenne de ces droites diamétrales est celle qui est parallèle à la droite menée par les deux points de contact communs.

VIII. Lorsque deux surfaces quelconques du second degré se coupent dans le systême de deux courbes planes, ces deux courbes se trouvent toujours en même temps sur deux surfaces coniques du second degré, et sont par conséquent les intersections mutuelles de quatre surfaces du second degré.

Ces quatre surfaces, et le systême des deux plans de leur intersection commune, ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes; la moyenne de ces droites diamètrales est parallèle à la droite dans laquelle se coupent les deux plans de l'intersection; et le plan diamétral opposé à cette droite contient les sommets des deux surfaces coniques.

IX. Etant données une surface quelconque du second degré et une droite placée d'une manière quelconque par rapport à elle : si par la droite on fait passer tant de plans qu'on voudra, et dont chacun coupe la surface suivant une courbe; et si pour chaque plan on conçoit la surface conique circonscrite à la surface donnée, et qui la touche dans la section faite par le plan, on aura autant de surfaces coniques différentes, circonscrites à la même surface du second degré, qu'on aura de plans. Cela posé,

1°. Les sommets de toutes les surfaces coniques circonscrites seront dans une même seconde ligne droite;

2°. Chaque surface conique coupera chacune des autres dans le systême de deux courbes planes;

3°. Les plans des intersections mutuelles des surfaces coniques passeront tous par la droite donnée ;

4°. La surface donnée, toutes les surfaces coniques circonscrites, et tous les systêmes de plans qui renferment les intersections des surfaces coniques, considérées deux à deux, auront les mêmes droites diamétrales conjuguées communes. La droite donnée sera parallèle à la droite diamétrale moyenne, et la droite qui passe par les sommets des surfaces coniques sera parallèle à une des droites diamétrales extrêmes.

Les deux droites que nous avons considérées dans cet article jouissent, l'une par rapport à l'autre, de propriétés qui sont réciproques ; c'est-à-dire que tout ce que nous avons dit de la seconde par rapport à la première, doit être dit réciproquement de la première par rapport à la seconde; excepté que si l'une d'elles coupe la surface, l'autre ne la coupe pas.

Enfin, si par le centre de la surface on mène la droite qui coupe en même temps les deux droites que nous venons de considérer chacune en un point, cette troisième droite coupera la surface en un troisième point. Cela posé, les distances de ces trois points au centre de la surface sont en proportion géométrique continue, et c'est la distance du point de la surface qui est la moyenne.

Théorême

Sur les Surfaces du second degré.

Par M. J. Binet.

Dans le deuxième numéro du premier volume de cette Correspondance, M. Livet a énoncé les deux théorêmes suivans :

La somme des carrés des trois axes conjugués d'une surface du deuxième degré est constante ;

Le volume du parallélipipède construit sur ces axes est constant.

Il existe une troisième relation entre ces axes conjugués, que l'on peut énoncer ainsi :

La somme des carrés des faces de ce parallélipipède est constante.

Si donc l'on désigne par a', b', c', les trois demi axes conjugués, réels ou imaginaires, d'une surface du second ordre, on aura

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = L,$$

$$a'^2 b'^2 \sin^2 (a', b') + a'^2 c'^2 \sin^2 (a', c') + b'^2 c'^2 \sin^2 (b', c') = M,$$

$$a'^2 b'^2 c'^2 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos^2 (a', b') - \cos^2 (a', c') - \cos^2 (b', c') \\ + 2 \cos (a', b') \cos (a', c') \cos (b', c') \end{array} \right\} = N.$$

Lorsque les angles (a', b'), (a', c'), (b', c') de ces axes conjugués deviendront droits, ces axes se confondront avec les axes principaux de la surface. On aura donc alors, en désignant par a, b, c, ces demi axes principaux,

$$a^2 + b^2 + c^2 = L,$$
$$a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 = M,$$
$$a^2 b^2 c^2 = N;$$

en sorte que les trois constantes L, M, N, sont les coefficiens d'une équation ayant pour racines les carrés des trois demi axes principaux : cette équation seroit

$$p^3 - L p^2 + M p - N = 0.$$

De l'Equation qui a pour racines les carrés des demi-axes principaux d'une surface du second degré.

Par M. HACHETTE.

L'équation générale des surfaces du second degré rapportées à trois axes rectangulaires, passant par le centre de ces surfaces, est

$$(1) \quad A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy = 1;$$

équation qui se réduit à

$$(2) \quad P x^2 + P' y^2 + P'' z^2 = 1,$$

lorsque les axes des coordonnées se confondent avec les axes principaux de la surface.

Les axes réels ou imaginaires étant $2a$, $2b$, $2c$, on a

$$P = \frac{1}{a^2}, \; P' = \frac{1}{b^2}, \; P'' = \frac{1}{c^2};$$

les valeurs de P, P', P'', sont les trois racines de l'équation suivante en t,

$$\left.\begin{array}{l} t^3-(A+A'+A'')t^2+(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)t \\ +AB^2+A'B'^2+A''B''^2-2BB'B''-AA'A'' \end{array}\right\}=0\ (E).$$

et les valeurs des carrés a^2, b^2, c^2, des demi axes principaux sont les racines de l'équation en $u=\frac{1}{t}$;

$$u^3-\frac{(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)}{K}u^2$$
$$+\frac{(A+A'+A'')}{K}u-\frac{1}{K}=0,$$

dans laquelle

$$K=AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2.$$

Cette équation en u est identique avec l'équation en p de l'article précédent,

$$p^3-Lp^2+Mp-N=0.$$

quant à l'équation (E), M. Petit l'obtient par un calcul très-simple, qui est fondé sur cette considération, que l'expression de $x^2+y^2+z^2$, ne change pas, quel que soit le système des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, auxquelles la surface est rapportée.

Nommant u^2 cette expression, $x^2+y^2+z^2$,

on aura, en faisant $x=\alpha z$, $y=\beta z$,

$$u^2=z^2(1+\alpha^2+\beta^2)$$

et supposant $\frac{1}{u^2}=t$, $t=\frac{1}{z^2(1+\alpha^2+\beta^2)}$

mettant dans cette équation pour z^2 sa valeur tirée de l'équation (1), on a

$$(a)\qquad t=\frac{A\alpha^2+A'\beta^2+A''+2B\beta+2B'\alpha+2B''\alpha\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}.$$

Substituant dans l'équation (2) pour x et y les valeurs $\alpha' z$, $\beta' z$, on en conclut la valeur de z^2, et par suite la valeur suivante de t :

$$(b)\qquad t=\frac{P\alpha'^2+P'\beta'^2+P''}{1+\alpha'^2+\beta'^2}$$

Les valeurs *maxima* ou *minima*, et en général les valeurs singulières de t, seront également données par les équations (a) et (b), pourvu qu'on fasse dans la première (a),

$$\frac{dt}{d\alpha}=0.\qquad \frac{dt}{d\beta}=0.$$

et dans la seconde (b),

$$\frac{dt}{d\alpha'}=0.\qquad \frac{dt}{d\beta'}=0.$$

mais si on met l'équation (b) sous la forme :

$$t(1+\alpha'^2+\beta'^2)=P\alpha'^2+P'\beta'^2+P'',$$

en la différenciant successivement par rapport à α', et à β', et éliminant α', β', l'équation finale (c)

$$(c)\qquad (t-P)\,(t-P')\,(t-P'')=0.$$

a évidemment pour racines les quantités P, P', P''.

Mettant l'équation (a) sous la forme

$$(a')\quad t(1+\alpha^2+\beta^2)=A\alpha^2+A'\beta^2+A''+2B\beta+2B'\alpha+2B''\alpha\beta.$$

la différenciant successivement par rapport à α et à β, et faisant

$$\frac{dt}{d\alpha}=0,\qquad \frac{dt}{d\beta}=0,$$

on aura

$$(3)\qquad \alpha t=A\alpha+B''\beta+B'.$$

$$(4)\qquad \beta t=A'\beta+B''\alpha+B.$$

Si maintenant des équations (a'), (3), (4), on élimine α, β, l'équation finale en t devra avoir les mêmes racines que l'équation (c).

Tirant les valeurs de α, β, des équations (3) et (4), on trouve

$$\alpha=B'(t-A')+BB'':(t-A)(t-A')-B''^2,$$

$$\beta=B\,(t-A)+B'B'':\qquad \textit{Idem},$$

ajoutant l'équation (3), multipliée par α, à l'équation (4) multipliée par β, et retranchant de l'équation (a'), on trouve

$$t - A'' = B\beta + B'\alpha.$$

Substituant dans cette dernière les valeurs précédentes de α, β, on a

$$(t-A)(t-A')(t-A'') - B^2(t-A) - B'^2(t-A') - B''^2(t-A'') - 2BB'B'' = 0.$$

Si l'on effectue les produits indiqués, on retrouve l'équation (E), qui a pour racines les trois quantités P, P', P'' de l'équation (2).

Cette équation ayant nécessairement ses trois racines réelles, puisque les quantités P, P', P'', le sont, M. Petit conclut qu'on pourra déterminer les signes de ces racines, au moyen de la règle de Descartes. Ou les trois racines seront positives, ou deux seront positives et une négative, ou on aura une racine positive et deux négatives, ou enfin les trois racines seront négatives.

Dans le premier cas, la surface sera un ellipsoïde; dans le second cas, un hyperboloïde à une nappe; dans le troisième cas, un hyperboloïde à deux nappes; dans le quatrième cas, la surface est imaginaire.

Si l'une des valeurs de t est nulle, la surface sera évidemment un cylindre, et la nature de sa base sera déterminée par les signes des deux autres racines.

S'il y a deux valeurs de t nulles, la surface sera le système de deux plans parallèles.

Si le dernier terme de l'équation (1), au lieu d'être l'unité, se réduit à zéro, il est facile de s'assurer que si P, P', P'', sont tous trois positifs, ou tous trois négatifs, la surface se réduit à un point.

Si les trois quantités P, P', P'', ne sont pas de même signe, la surface est un cône.

Si l'une des trois quantités P, P', P'', est nulle, la surface se réduit à une droite, si les deux autres quantités sont de même signe, ou au système de deux plans, si elles sont de signes différens.

Enfin, si deux des trois quantités P, P', P'', sont nulles, la surface se réduit à un plan.

Méthode pour discuter l'équation générale du second degré entre trois variables, x, y, z.

On cherchera d'abord les coordonnées du centre de la surface. La manière la plus simple de les obtenir consiste à différencier

l'équation proposée successivement par rapport à x, à y, à z. Les trois équations linéaires qui résultent de cette différentiation donneront pour les coordonnées du centre, ou trois valeurs finies, ou des valeurs indéterminées, ou des valeurs infinies.

1°. Supposons les trois valeurs finies. La surface ayant un centre, on la rapportera à ce centre comme origine des coordonnées rectangulaires; on formera l'équation (E), et on déterminera la nature de la surface par la règle énoncée page précédente.

2°. On suppose que les équations qui donnent les coordonnées du centre se réduisent à une ou à deux, auquel cas ces coordonnées sont indéterminées; si les trois équations se réduisent à une seule, la surface est le systême de deux plans parallèles; si elles se réduisent à deux, la surface est alors un cylindre dont l'axe est la droite représentée par les deux équations restantes; en coupant ce cylindre par un plan perpendiculaire à son axe, la section déterminera la nature du cylindre; lorsque cette section sera le systême de deux droites, le cylindre sera réduit à deux plans qui se coupent.

3°. On suppose que les coordonnées du centre soient infinies, ce qui est indiqué par les trois équations qui doivent donner les coordonnées du centre, et qui deviennent incompatibles; alors on coupera la surface par un plan quelconque. Si, quelle que soit la position du plan sécant, la section est une parabole, la surface sera un cylindre parabolique. Si la section ne peut pas devenir une ellipse, la surface proposée sera un paraboloïde hyperbolique; si la section ne peut pas devenir une hyperbole, l'équation proposée représente un paraboloïde elliptique.

On a d'ailleurs indiqué (pages 203 et 315 de ce volume) un moyen de reconnoître si la surface proposée est de révolution. On a alors entre les constantes de l'équation générale (1), les équations suivantes :

$$BB'\,(A - A'') - B''(B'^2 - B^2) = 0.$$

$$B'B''(A' - A'') - B\,(B''^2 - B'^2) = 0.$$

$$B''B\,(A'' - A\,) - B'\,(B^2 - B''^2) = 0.$$

dont deux quelconques comportent la troisième.

La droite des équations $Bx - B''z = 0$, $B'y - B''z = 0$, est parallèle à l'axe de révolution.

Du Plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe. (*Voyez* le Supplément de la Géométrie Descriptive, art. 56, pag. 48);

Par M. Hachette.

Soient PS, RQ, planche A (fig. 1), les axes principaux réels de l'hyperboloïde à une nappe, $PQRS$ l'ellipse construite sur ces droites comme axes, et $XAYA'$, la section faite dans cette surface par un plan parallèle à celui de l'ellipse $PQRS$. Soient de plus xpx', ysy' (fig. 2), les deux branches de l'hyperbole contenue dans le plan XY (fig. 1) perpendiculaire au plan des axes principaux PS, QR.

ps (fig. 2) étant la projection de l'ellipse $PQRS$, xy ou $x'y'$ sera la projection de l'ellipse $XAYA'$ sur le plan de l'hyperbole principale, dont les axes sont dirigés suivant les droites pos, zoz', l'une horizontale, et l'autre verticale.

On donne la projection horizontale M d'un point de l'hyperboloïde, et on demande le plan qui le touche en ce point? La verticale élevée par le point M coupe l'hyperboloïde en deux points; d'où il suit qu'à la projection horizontale M correspondent deux points m, m', en projection verticale (fig. 2). Pour trouver ces derniers points, on mène par le point M la droite AMA', qui touche l'ellipse $PQRS$ au point T; on projete les points T, A, A' (fig. 1) en (fig. 2) t, a ou α, a' ou α', et on joint les points a, t, α', par une droite, et les points a', t, α, par une autre droite. Ces deux droites sont coupées par la verticale Mmm' aux points cherchés m, m'.

On auroit pu mener par le point M une autre tangente BMB' à l'ellipse $PQRS$. En projetant les points T', B, B' (fig. 1) en t', b ou β, b' ou β', et joignant les points $bt'\beta'$, $b't'\beta$, on obtient deux droites qui sont encore coupées par la verticale Mmm' aux mêmes points m, m'. Il résulte de cette construction que le point de l'hyperboloïde dont la projection horizontale est M, a pour projection verticale m ou m'. Le plan tangent en ce point passe par les deux droites de la surface qui se coupent en ce point; d'où il suit que le plan tangent au point M, m, a pour trace horizontale la droite AB, et le plan tangent au point M, m', a pour trace la droite $A'B'$.

En considérant la droite M, (fig. 1), mm' (fig. 2), comme une corde de l'hyperboloïde, on voit que des quatre droites de cette surface, menées par les extrémités de la corde, la corde et deux

de ces droites sont dans un même plan. En substituant à la corde M, mm', toute autre corde MN, $m'n'$, la même coïncidence aura lieu. En effet, tout plan qui passe par une corde de l'hyperboloïde et par une droite de cette surface, contient nécessairement une seconde droite, et cette dernière droite coupe la première en un point dans lequel le plan touche la surface.

Pour construire la fig. 1, qui représente les projections de la génératrice de l'hyperboloïde dans les deux systèmes de génération, on peut diviser la demie ellipse XAY d'une manière arbitraire, et mener par chaque point de division deux tangentes à l'ellipse principale $PQRS$. Elles seront les projections de deux droites partant d'un même point de la surface. Mais ces couples de droites étant menées arbitrairement, la demie ellipse $XA'Y$ ne sera pas divisée de la même manière que la première moitié XAY; pour que les deux divisions soient symétriques, M. Monge a observé que les petits arcs d'ellipse $X1$, 12, 34, etc., devoient être les projections d'arcs égaux $X1'$, $1'2'$, $3'4'$, etc. d'un cercle qui auroit pour diamètre la droite XY. C'est d'après cette division du cercle, qu'il faudroit construire les figures 1 et 2, si l'on vouloit exécuter un support de vase, ou une corbeille de la forme de l'hyperboloïde à une nappe.

Nous terminerons cet article par une remarque sur les paraboloïdes. J'ai démontré que les deux paraboloïdes étoient représentées par l'équation :

$$pz^2 \pm p'y^2 - 4pp'x = 0.$$

p et p' étant des paramètres de la surface; en coupant cette surface par un plan quelconque de l'équation

$$ax + by + cz + 1 = 0,$$

qui donne

$$x = -\frac{(1 + by + cz)}{a},$$

et substituant cette valeur dans l'équation précédente, les coefficiens de y^2 et de z^2 ne varient pas; d'où il suit que quel que soit le plan secant, les sections se projètent sur le plan des yz, suivant des courbes semblables, donc de quelque manière qu'un paraboloïde soit situé dans l'espace, *il existe un plan sur lequel toutes les sections planes du paraboloïde se projètent suivant des courbes semblables.*

Sur le Contact des Surfaces engendrées par une ligne droite;

Par M. J. Binet.

Ces surfaces sont très-fréquemment employées dans l'application de la géométrie aux arts. Quand elles ne sont pas développables on les appelle surfaces gauches. Les méthodes dont on se sert pour leur mener des plans tangens, reposent sur le théorême suivant que M. Hachette a donné dans des *Additions à la Géomètrie Descriptive* de M. Monge.

Deux surfaces engendrées d'une manière quelconque par une ligne droite, qui ont une génératrice commune, et en trois points de cette génératrice trois plans taugens communs, sont tangentes l'une à l'autre dans tous les points de cette génératrice.

Par les trois points déterminés a, b, c sur une génératrice d'une telle surface, concevons trois courbes quelconques A, B, C, tracées sur cette même surface, et pouvant être considérées comme les trois directrices du mouvement de la génératrice; désignons par a', b', c' les trois points où ces courbes sont rencontrées par une autre génératrice à distance de la première. Imaginons une courbe quelconque A', passant par les points a et a'; une autre courbe quelconque B' passant par les points b et b'; une troisième courbe C' passant par les points c et c'; et regardons les courbes A', B', C', comme servant de directrices au mouvement d'une ligne droite, qui alors engendrera une surface, rencontrant la première suivant les deux lignes droites abc, et $a'b'c'$. Que l'on conduise un plan qui rencontre la ligne abc en un point d, la ligne $a'b'c'$, en un point d'; il coupera la première surface suivant une courbe D et la deuxième suivant une autre courbe D', et ces deux courbes D et D' auront les deux points d et d' communs. Tout cela posé, si l'on conçoit que la droite $a'b'c'$ se meuve sur la première surface, de manière à se rapprocher indéfiniment de la droite $a\ b\ c$, les points a', b', c', d' se mouveront respectivement sur les courbes A, B, C, D, de manière à se rapprocher indéfiniment aussi des points a, b, c, d; en sorte que lorsque la ligne $a'\ b'\ c'$, atteignant la limite des positions qu'elle doit prendre, se confondra avec $a\ b\ c$, les courbes A', B', C', D' deviendront ensemble tangentes en a, b, c, d, aux courbes A, B, C, D. La surface engendrée par la droite s'appuyant sur les courbes A', B', C', devenues tangentes aux courbes A, B, C, sera tangente à la première surface, dans toute l'étendue de la droite

a b c, puisque ces deux surfaces étant coupées par un plan passant par un point quelconque *d* de cette droite, fournissent des courbes tangentes en ce point.

Il résulte de là, que si aux trois points *a*, *b*, *c*, on mène trois courbes quelconques *A'*, *B'*, *C'*, respectivement tangentes en ces points aux courbes *A*, *B*, *C*, et qu'on les employe comme directrices du mouvement d'une ligne droite, la surface engendrée par cette droite sera tangente à la surface proposée dans toute l'étendue de la droite *a b c*.

Pour démontrer le théorême qui fait l'objet de cette note, il suffit d'observer que par les trois points où les deux surfaces ont leurs plans tangens communs, il est possible de tracer sur ces surfaces des courbes respectivement tangentes et pouvant être considérées comme directrices des droites génératrices des surfaces proposées; et ces surfaces, par suite de ce que nous venons d'établir, seront tangentes l'une à l'autre dans toute l'étendue de leur génératrice commune.

On prouve d'une manière semblable, que deux surfaces engendrées par une ligne droite assujettie à rester constamment parallèle à un plan, sont tangentes dans toute l'étendue de cette génératrice, si en deux des points de cette droite, ces surfaces ont des plans tangens communs.

De la Pyramide Triangulaire;

Par M. Hachette.

J'ai donné dans le Supplément de la Géométrie Descriptive, art. 131, une solution de ce problême : connoissant dans une pyramide triangulaire, la base et les angles des faces opposés aux côtés de la base, construire le sommet de cette pyramide. En appliquant l'analyse à cette solution, on démontre rigoureusement que ce problême a dans le cas général seize solutions.

Soient (planche. *B*) *XYZ*, fig. 1, la base de la pyramide donnée; *XFZf*, *ZOYo*, *XGYg*, les cercles générateurs des trois surfaces de révolution qui par leur intersection déterminent le sommet de la pyramide. Les deux premières surfaces qui ont pour axes les droites *XZ*, *ZY*, se coupent suivant une ligne composée de deux branches, l'une qui résulte de l'intersection des nappes de surfaces engendrées par les grands segmens *XFZ* et *ZOY*, et des nappes de surfaces engendrées par les

petits segmens XfZ, ZoY; l'autre, qui résulte de l'intersection des nappes engendrées par un grand segment XFZ, et un petit segment ZoY, ou par un grand segment ZOY et un petit segment XfZ.

La première branche, en tournant autour de l'axe XY, engendre une nappe de la quatrième surface de révolution, dont la section par le plan du triangle XYZ, est $ZACB$. La section de la seconde nappe par le même plan, est $ZA'C'B'$; ces deux sections ont pour normale commune l'axe XY, qui divise chacune d'elles en deux parties égales; elles sont coupées par les deux cercles $XGYg$, et $XG'Yg'$, en seize points, dont huit marqués des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, appartiennent à la courbe $ZABC$. Les huit autres points marqués des mêmes chiffres accentués, appartiennent à la courbe $ZA'B'C'$. Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, mis deux à deux dans l'ordre suivant, 1 — 8, 2 — 7, 3 — 6, 4 — 5, sont à égales distances de l'axe XY, et sur deux droites perpendiculaires à cet axe. Il en est de même des points 1', 2', 3', 4', par rapport aux points 8', 7', 6', 5'.

D'où il suit que les sommets des pyramides cherchées sont situés sur huit cercles du diamètre 1 — 8, 2 — 7, 3 — 6, 4 — 5, 1' — 8', 2' — 7', 3' — 6', 4' — 5'. Ces cercles appartiennent à la troisième surface de révolution, dont l'axe est XY, et qui a pour génératrice les axes XGY, XgY. Chacun de ces cercles contient deux sommets des pyramides cherchées. En effet, considérons celui dont le diamètre est 1 — 8, et qui a pour centre un point de l'axe XY. Le point 8 de la courbe $ZACB$ provient de l'intersection de deux cercles décrits par deux points des grands segmens ZOY, ZFX; donc, si l'on porte la droite $Y8$ sur Ya, corde de l'arc ZOY, et la droite Za sur Za', corde de l'arc ZFX, ou la droite $X8$ sur la corde Xa' du même arc ZFX, les droites Ya, Za, $= Za'$ et Xa', seront les trois arêtes d'une des pyramides cherchées. Abaissant la perpendiculaire $a\alpha$ sur l'axe ZY, et la perpendiculaire $a'\alpha$, sur l'axe XZ, ces deux perpendiculaires se rencontrent en un point α du diamètre 1 — 8, qui est la projection du sommet de la pyramide sur le plan de la base XYZ. Le même point α est la projection du sommet d'une seconde pyramide, symétrique par rapport à la première.

Le cercle du diamètre 1 — 8 contient les sommets de deux pyramides; ces sommets se projetent en α sur le plan horizontal du triangle XYZ, et en α, (α), sur le plan vertical vv' (fig. 2), perpendiculaire à l'axe XY. Les quatre projections horizontales α, β, γ, δ, des sommets de pyramides qui correspondent à la courbe $ZABC$, forment un quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, dont la

projection verticale (fig. 2) est le système des deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, et (α) (β) (γ) (δ). Les quatre projections horizontales α', β', γ', δ', des sommets de pyramides qui correspondent à la courbe $ZA'B'C'$, forment un quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, dont la projection verticale (fig. 2) est le système de deux quadrilatères $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, et (α') (β') (γ') (δ').

Cette solution fait voir que les pyramides qui ont pour bases le triangle XYZ, et pour angles opposés aux côtés de cette base, les angles déterminés par les arcs XFZ, ZOY, YGX, et leurs supplémens, sont au nombre de seize; nous allons démontrer que ce nombre de solutions est le plus grand possible.

M. Lagrange a appliqué la méthode des *Courbes d'Erreurs* à la solution de cette même question, relative à la pyramide triangulaire. (*Voyez* ses leçons à l'ancienne Ecole Normale, qu'on vient de réimprimer pour en former les cahiers 7 et 8 du Journal de l'Ecole Polytechnique.) Nommant a, b, c les trois côtés de la base; α, β, γ les cosinus des angles des faces opposés aux côtés; x, y, z les trois arêtes, on a les trois équations suivantes:

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha xy.$$
$$b^2 = y^2 + z^2 - 2\beta yz.$$
$$c^2 = z^2 + x^2 - 2\gamma xz.$$

M. Lagrange observe qu'en faisant $\frac{y}{x} = u$, $\frac{z}{x} = t$, ces trois équations deviennent,

$$a^2 = x^2(1 + u^2 - 2\alpha u).$$
$$b^2 = x^2(u^2 + t^2 - 2\beta ut).$$
$$c^2 = x^2(1 + t^2 - 2\gamma t).$$

De ces trois équations on déduit les deux suivantes du second degré en u et t;

$$(E).\ \begin{cases} a^2(1 + t^2 - 2\gamma t) = c^2(1 + u^2 - 2\alpha u). \\ b^2(1 + t^2 - 2\gamma t) = c^2(u^2 + t^2 - 2\beta ut). \end{cases}$$

L'élimination de u ou de t entre ces deux équations, conduit à une équation du quatrième degré en u ou t. Substituant les quatre valeurs de u dans l'équation

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + u^2 - 2\alpha u}},$$

on aura les quatre valeurs de x correspondantes, et à cause de la double valeur du cosinus α, qui peut être pris positivement ou négativement, l'arête x a huit valeurs différentes. Les huit valeurs correspondantes de l'arête y sont données par l'équation $y = xu$. Mais par l'élimination de t^2 entre les équations (E), on obtient une équation linéaire en t, qui détermine les quatre valeurs de t qui correspondent aux quatre valeurs de u et aux huit valeurs de x; combinant les valeurs de x et de t qui se correspondent, l'équation $z = xt$, donnera les huit valeurs de z qui correspondent aux huit valeurs de x. De cette manière on déterminera les huit systèmes d'arêtes x, y, z, qui forment la pyramide dont la base triangulaire a pour côtés les droites a, b, c, et dont les angles compris entre les arêtes ont pour cosinus $\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma$.

Aux huit pyramides qui ont pour arêtes les droites x, y, z, on doit en ajouter huit autres qui leur sont symétriques. Ces dernières ont même base que les premières, mêmes arêtes, mêmes angles opposés aux côtés de la base; elles n'en diffèrent que par la position des sommets. Les sommets d'une pyramide et de celle qui lui est symétrique, sont placés à des distances égales et opposées du plan de la base.

En appliquant l'analyse à la solution géométrique précédente, on arrive aux mêmes conclusions.

Soient a, b, $2c$, les trois côtés XZ, ZY, YX, de la base XYZ (fig. 1), p et q les cosinus des angles opposés aux côtés a et b, et l, m, n, les trois arêtes de la pyramide. Prenant pour origine des coordonnées le milieu de la droite XY, chaque point de la courbe $ZABC$, $ZA'B'C'$, résulte de l'intersection de deux cercles décrits des points X et Y comme centres, avec des rayons égaux aux arêtes l et m, qui passent par les points X et Y de la base; ces cercles ont pour équations,

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & (x-c)^2 + y^2 = l^2 \\ (2) & (x+c)^2 + y^2 = m^2\end{array}\right\} l^2 - m^2 = -4cx.$$

Les arêtes l et n comprennent entr'elles l'angle dont le cosinus est p; les arêtes m et n comprennent l'angle dont le cosinus est q; d'où il suit qu'on aura les équations suivantes

$$(3) \qquad a^2 = l^2 + n^2 - 2lnp.$$

$$(4) \qquad b^2 = m^2 + n^2 - 2mnq.$$

Éliminant de ces quatre équations l, m, n, l'équation finale en x, y, appartient à la courbe $ZABC$, $ZA'B'C'$.

Retranchant l'équation (4) de l'équation (3), on a

$$a^2-b^2=l^2-m^2-2n(lp-mq);$$

$$n=\frac{l^2-m^2+b^2-a^2}{2(lp-mq)}$$

Substituant cette valeur de n dans l'équation (4),

$$(5)\qquad b^2=m^2+\frac{(l^2-m^2+b^2-a^2)^2}{4(lp-mq)^2}-\frac{mq(l^2-m^2+b^2-a^2}{lp-mq}$$

mettant dans cette équation pour l, m, l^2, m^2, l^2-m^2, leurs valeurs données par les équations (1), (2), on parvient à l'équation suivante,

$$\left\{\begin{matrix}p^2(y^2+(x-c)^2)(b^2-y^2-(x+c)^2+q^2(y^2+(x+c)^2(a^2-y^2-(x-c)^2)\\ -(b^2-a^2-4cx)^2\end{matrix}\right\}^2$$
$$=4p^2q^2\left(\frac{a^2+b^2}{2}-(x^2+y^2+c^2)\right)\ (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2)$$

du huitième degré en x, y, et les constantes a, b, c, p, q; cette équation est remarquable en ce que dans les termes qui contiennent p et q, les exposans de ces quantités sont pairs, et élevés seulement à la seconde puissance. D'où il suit que cette équation ne varie pas, quel que soit le signe de ces cosinus. La courbe de cette équation est coupée par le cercle capable de l'angle opposé au côté $2c$, et qui a pour équation

$$(6)\qquad x^2+(y+h)^2=r^2,\ \text{ou}\ x^2+y^2=r^2+h^2-2hy.$$

Or, en substituant cette valeur de x^2+y^2 dans l'équation de la courbe du huitième degré, cette équation se réduit au quatrième degré; d'où il suit que le cercle de l'équation (6) ne peut couper la courbe $ZABC$, $ZA'B'C'$, qu'en huit points. Mais le cercle capable de l'angle opposé au côté $2c$, peut prendre deux positions XGY, $XG'Y$ symétriques par rapport à l'axe XY (fig. 1), et dans la seconde position, il a pour équation

$$(7)\qquad x^2+(y-h)^2=r^2;$$

($h=\sqrt{r^2-c^2}$, et r est une constante qui dépend de l'angle

opposé au côté $2c$); d'où il suit que les deux cercles des équations (6) et (7), coupent la courbe aux deux branches $ZABC$, $ZA'B'C'$ en seize points, qui correspondent à seize sommets de pyramides; les projections de ces sommets sur le plan du triangle XYZ, se réduisent aux huit points α, β, γ, δ, α', β', γ', δ'.

Des seize sommets, huit sont placés au-dessus du plan du triangle XYZ, et se projètent (fig. 2) en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$: les huit autres se projètent (fig. 2) au-dessous de l'horizontale vv', et sont marqués des mêmes lettres en parenthèse : les points marqués des mêmes lettres sont situés sur une droite perpendiculaire à la trace vv' des plans horizontal et vertical.

De la Sphère.

Par M. Hachette.

J'ai réuni dans le *Supplément de la Géométrie Descriptive* de Monge, les propositions relatives à la sphère, qui sont depuis long-temps l'objet de nos leçons sur les plans tangens aux surfaces courbes. On connoissoit la solution de cette question, « Mener une sphère tangente à quatre sphères. » Elle n'est pas très-importante par elle-même; mais la solution que j'en ai donnée m'a paru convenir à un ouvrage classique de *Géométrie Descriptive*, parce qu'elle offre de nouvelles combinaisons de plans et de sphères. Pour traiter cette question, on pouvoit, comme Fermat, la ramener à des problêmes de géométrie plane. En suivant cette méthode, nous n'aurions pas rempli notre objet, qui est d'habituer l'esprit à des considérations sur les propriétés de l'étendue; et dans ce sens, la solution qu'on doit préférer, est celle qui présente à l'esprit de nouvelles surfaces, remarquables par un mode simple de génération, ou par quelques propriétés qui conduisent à des constructions graphiques élégantes.

On peut expliquer la solution d'un problême de géométrie aux trois dimensions, en désignant les points de l'espace par des lettres; et c'est cette méthode que j'ai suivie dans le *Supplément de la Géométrie Descriptive*, pour déterminer la sphère qui en touche quatre autres; mais lorsqu'une solution doit être suivie d'une construction graphique, il est important que cette solution soit accompagnée d'un dessin qui représente la disposition des données du problême, et les lignes ou les surfaces qu'il s'agit de déterminer. C'est pour remplir cet objet, que

j'ajoute au texte du *Supplément de la Géométrie Descriptive* une explication des planches C et D, qui se rapporte aux articles du Supplément, dont j'indique les numéros.

Les centres et les rayons de quatre sphères étant donnés, soient (planche C) A, B, C les centres des trois premières sphères ; D' la projection du centre D de la quatrième sphère sur le plan des trois centres A, B, C, plan qu'on suppose horizontal. $d\,D''$ est, sur le plan vertical $S\,d$, la hauteur du centre de la quatrième sphère au-dessus du plan horizontal. Le plan mené par le centre D et par les points A et B étant abattu sur le plan horizontal, ce point D est l'intersection de la droite $D'\,D$ perpendiculaire à $A\,B$, et de la parallèle $d'\,D$ à $A\,B$, menée par le point d' distant du point S d'une quantité $S\,d' = S\,D''$.

Les droites qui joignent les quatre centres des sphères forment une pyramide triangulaire à six arêtes ; chaque arête contenant les sommets de deux cônes circonscrits à deux des quatre sphères, il s'ensuit que les cônes extérieurs et intérieurs circonscrits à quatre sphères, sont au nombre de douze. Les sommets de ces douze cônes sont distribués trois à trois sur une même droite.

Nommant A, B, C, D les sphères qui ont leurs centres aux points désignés (Planche C) par les mêmes lettres, les six sommets des cônes extérieurs et intérieurs circonscrits aux trois sphères A, B, C, sont (art. 26 du Supplément) situés sur quatre droites $S\,S'\,S''$, $S\,s'\,s''$, $s\,S'\,s''$, $s\,s'\,S''$; ces lettres S, S', S'' désignant les sommets de cônes extérieurs, et s, s', s'' les sommets de cônes intérieurs. Les six sommets de cônes extérieurs et intérieurs, circonscrits aux trois sphères A, B, D, sont situés sur les quatre droites $S\,R'\,R''$, $S\,r'\,r''$, $s\,R'\,r''$, $s\,r'\,R''$; enfin, nommant Q', q'', les sommets des cônes extérieur et intérieur, circonscrits aux deux sphères C et D, les six sommets des cônes extérieurs et intérieurs, circonscrits aux trois sphères A, B, D,, seroient situés sur quatre autres droites,

$$S''\,R''\,Q'',\ S''\,r''\,q'',\ s''\,R''\,q'',\ s''\,r''\,Q''.$$

Ces douze droites sont situées trois à trois dans quatre plans, qui passent par trois droites arrangées dans l'ordre suivant :

1er. Plan. —	$S\,S'\,S''$,	$S\,R'\,R''$,	$S''\,R''\,Q''$.
2e. Plan.	$S\,s'\,s''$,	$S\,r'\,r''$,	$S''\,r''\,q''$.
3e. Plan.	$s\,S'\,s''$,	$s\,R'\,r''$,	$s''\,R''\,q''$.
4e. Plan.	$s\,s'\,S''$,	$s\,r'\,R''$,	$s''\,r''\,Q''$.

Les quatre petits cercles, lieux des points de contact de la sphère A (c'est-à-dire dont le centre est en A), sont perpendiculaires au plan des trois centres A, B, C, et ont pour diamètres les droites (art. 39 du Supplément),

$$A^e\,B^e\,C^e,\ A^e\,B^e\,C^i,\ A^e\,B^i\,C^e,\ A^e\,B^i\,C^i,$$

droites qu'on auroit pu désigner sur la figure (Planch. C) de la manière suivante :

$$A^i\,B^i\,C^i,\ A^i\,B^i\,C^e,\ A^i\,B^e\,C^i,\ A^i\,B^e\,C^e.$$

Ces quatre petits cercles sont les bases de cônes droits circonscrits à la sphère A, dont les sommets f, g, h, k, sont situés sur les droites, lieux des sommets des cônes extérieurs et intérieurs, circonscrits aux trois sphères A, B, C; de sorte que

Le point f est sur la droite	$S\,S'\,S''$.
Le point g sur la droite	$S\,s'\,s''$.
Le point h sur la droite	$s\,S'\,s''$.
Le point k sur la droite	$s\,s'\,S''$.

Considérant le systême des trois sphères A, B, D (1), les points analogues à f, g, h, k, sont f', g', h', k', situés sur les droites $S\,R'\,R''$, $S\,r'\,r''$, $s\,R'\,r''$, $s\,r'\,R''$. Ces quatre points f', g', h', k', sont les sommets de cônes droits circonscrits à la sphère A, qui touchent cette sphère suivant les cercles des diamètres :

$$A^e\,B^e\,D^e,\ A^e\,B^e\,D^i,\ A^e\,B^i\,D^e,\ A^e\,B^i\,D^i.$$

Un quelconque de ces quatre petits cercles coupe en quatre points deux des quatre petits cercles qui ont pour diamètres les droites

$$A^e\,B^e\,C^e,\ A^e\,B^e\,C^i,\ A^e\,B^i\,C^e,\ A^e\,B^i\,C^i,$$

ce qui détermine les points de contact de la sphère A et de la cinquième sphère, qui touche les quatre sphères A, B, C, D.

(1) Les lignes relatives au systême des trois sphères A, B, C, sont ponctuées sur le dessin en points ronds ; et celles qui sont relatives au systême des trois sphères A, B, D, sont ponctuées d'un trait long.

Le cercle du diamètre $A^e\ B\ \ C^e$ est coupé par les deux cercles des diamètres $A^e\,B^e\,D^e$, $A^e\,B^e\,D^i$, en quatre points qui se projètent sur le plan des trois centres A, B, C, aux points 1, 2, 3, 4. Nous allons construire sur une figure à part (Pl. D) les quatre points 1, 2, 3, 4, et on trouvera de la même manière les douze autres points.

D'après ce qui a été dit (art. 39 du Supplément), on a :

Cercle du diamètre $A^eB^eC^e$, coupé par les cercles des diamètres		$A^eB^eD^e$, $A^eB^eD^i$;
Cercle du diamètre $A^eB^eC^i$,	*idem.*	*idem.*
Cercle du diamètre $A^eB^iC^e$,	*idem.*	$A^eB^iD^e$, $A^eB^iD^i$,
Cercle du diamètre $A^eB^iC^i$,	*idem.*	*idem.*

Dans la figure (Planche D), nous ne considérerons que les points d'intersection du cercle dont le diamètre est $A^e\,B^e\,C^e$, et des cercles qui ont pour diamètres les droites $A^eB^eD^e$, $A^eB^eD^i$. Des douze droites lieux des sommets des cônes droits circonscrits aux quatre sphères données, nous ne rapporterons sur cette figure, que les trois droites $S\,S'\,S''$, $S\,R'\,R''$, $S\,r'\,r''$; et les trois sommets f, f', g' des trois cônes droits circonscrits à la sphère A, qui ont pour bases les diamètres

$$A^e\,B^e\,C^e,\ A^e\,B^e\,D^e,\ \ A^e\,B^e\,D^i.$$

Nommant r, r', r'', r''', les rayons des quatre sphères données, R le rayon de la sphère tangente, ρ, ρ', ρ'', ρ''', les distances du centre de la sphère tangente aux centres des sphères données, on a les quatre équations, (*Correspondance*, tom. 2, pag. 63)

$$R \mp r = \rho,\ R \mp r' = \rho',\ R \mp r'' = \rho'',\ R \mp r''' = \rho''',$$

qui fournissent seize combinaisons ; ce qui prouve qu'en général il y a seize sphères qui peuvent toucher quatre sphères données.

En effet la première équation donne :

$$R - r = \rho.$$

Les deux équations suivantes donnent quatre combinaisons ; et pour chacune de ces combinaisons, on a :

$$\text{ou } R - r''' = \rho''',\ \text{ou } R + r''' = \rho''' ;$$

ce qui élève le nombre de combinaisons possibles à huit. On a par la même raison huit combinaisons, lorsqu'on suppose dans

la première équation $R + r = \rho$; d'où il suit que quatre sphères données peuvent être touchées par une cinquième sphère de seize manières différentes.

Des seize sphères tangentes, cherchons celle dont le rayon $R = \rho + r = \rho' + r' = \rho'' + r'' = \rho''' + r'''$, c'est-à-dire, celle qui touche intérieurement les quatre sphères données. La construction qui détermine le centre de cette sphère, donne en même temps le centre et le rayon de la sphère qui touche intérieurement les quatre sphères données.

Ayant augmenté les rayons des trois sphères A, B, C, d'une quantité TT' (pl. D) prise arbitrairement, on regardera les points A, B, C, comme les centres de trois nouvelles sphères qui se couperont en un point, centre d'une sphère T, tangente aux sphères A, B, C; par le point de contact de cette sphère T, et de la sphère A, on mènera un plan tangent à cette dernière sphère, et ce plan coupera la droite $S\,S'\,S''$ au point f, sommet du cône droit circonscrit à la sphère A, et qui la touche suivant le cercle du diamètre $A^e\,B^e\,C^e$. Ce cercle contient les points de contact de la sphère A et de toutes les sphères qui peuvent toucher les trois sphères A, B, C extérieurement.

Considérant les trois sphères A, B, D, on construira de la même manière un second cercle du diamètre $A^e\,B^e\,D^e$, qui contient les points de contact de la sphère A et de toutes les sphères qui peuvent toucher les trois sphères A, B, D extérieurement. L'intersection de ces deux petits cercles de la sphère A détermine sur cette sphère le point de contact d'une cinquième sphère, qui la touche en même temps que les trois autres sphères B, C, D.

Les deux petits cercles des diamètres $A^eB^eC^e$, $A^eB^eD^e$, se coupant en deux points, dont les projections sur le plan des trois centres A, B, C, sont 1 et 2; le second point appartient à la sphère qui touche les quatre sphères données intérieurement. Si des points 1 et 2, on abaisse des perpendiculaires sur la droite AB, les points d'intersection 1', 2' de ces perpendiculaires et du diamètre $A^e\,B^e\,D^e$, sont les projections des points communs aux deux petits cercles de la sphère A, sur le plan des trois centres A, B, D.

Toutes les sphères qui touchent les sphères A et B extérieurement, et la sphère D intérieurement, touchent la sphère A, suivant un cercle du diamètre $A^e\,B^e\,D^i$. Pour déterminer ce diamètre, nommons r, r', r'' les rayons des sphères A, B, D, et supposons qu'on ait augmenté les rayons r, r' d'une quantité arbitraire TT' (pl. D); regardant les points A, B, D comme les centres de trois sphères qui ont pour rayons, la première $r + T'T$,

la seconde, $r' + TT'$ et la troisième, $TT' - r''$; ces trois sphères se couperont en un point centre d'une sphère T' du rayon TT', qui touchera les sphères *A* et *B* extérieurement, et la sphère *D* intérieurement. Cette sphère T' touchera la sphère *A* en un point ; si par ce point on mène un plan tangent à la sphère *A*, ce plan coupera la droite $S\,r'\,r''$ en un point g', sommet du cône circonscrit à la sphère *A*, et qui touche cette sphère suivant le petit cercle du diamètre $A^e\,B^e\,D^i$. Le plan de ce petit cercle perpendiculaire à celui des trois centres *A*, *B*, *D*, coupe le petit cercle du diamètre $A^e\,B^e\,D^e$, en deux points qui se projètent en 3 et 4 sur le plan des trois centres *A*, *B*, *C* et en 3′, 4′ sur le plan des trois centres *A*,*B*,*D*.

En raisonnant de la même manière, on verra (Planche *C*) que la sphère *A* est touchée par un cône droit, qui a son sommet en *g* sur la droite $S\,s'\,s''$, et par deux autres cônes droits qui ont leurs sommets, l'un en f' sur la droite $S\,R'\,R''$, l'autre en g' sur la droite $S\,r'\,r''$, et dont les bases sont des cercles des diamètres $A^eB^eD^e$, $A^eB^eD^i$. Le cercle de contact de la sphère *A* et du premier cône, et les cercles de contact de la même sphère *A* et des deux autres cônes, se coupent en quatre points, qui se projètent sur le plan des trois centres *A*,*B*,*C*, suivant le diamètre $A^e\ B^e\ C^i$. Par deux de ces quatre points de la sphère *A*, il faut concevoir deux sphères, dont l'une touche les sphères *A*, *B*, *D* extérieurement, et la sphère *C* intérieurement, et dont l'autre touche les sphères *A*, *B*, *D* intérieurement, et la sphère *C* extérieurement. Par les deux autres points de la sphère *A*, qui se projètent sur le diamètre $A^e\,B^e\,C^i$, on peut mener deux sphères telles que la première touchant les sphères *A* et *B* extérieurement, et les sphères *C* et *D* intérieurement, la seconde touche les sphères *A* et *B* intérieurement, et les sphères *C* et *D* extérieurement.

Ayant déterminé le centre de la sphère qu'on a désignée (page précédente) par la lettre *T*, le plan mené par le centre perpendiculairement à la droite $SS'S''$, contient (*art.* 34 *du Suppl.*) les centres de toutes les sphères qui peuvent toucher à-la-fois les trois sphères *A*, *B*, *C* extérieurement ou intérieurement, et par conséquent le centre de la sphère comprise dans cette série, qui touche les quatre sphères *A*, *B*, *C*, *D*. Or, on a déterminé le point de contact de cette sphère et de la sphère *A* ; donc le rayon de la sphère *A* qui passe par ce point de contact, coupe le plan des centres perpendiculaire à la droite $S\,S'\,S''$, en un point centre de l'une des seize sphères, qui peuvent toucher les quatre sphères données *A*,*B*,*C*,*D*. D'ailleurs, connoissant le point de contact de l'une des seize sphères tangentes et de la sphère *A*, il est très-facile de le trouver sur les sphères

B, *C*, *D*, en se rappelant cette proposition, démontrée *art.* 29 *du Supplément*, que lorsqu'une sphère touche trois sphères données *A*, *B*, *C*, les droites menées par les points de contact, passent par l'un des sommets des cônes intérieurs ou extérieurs, circonscrits aux sphères données.

Si des quatre sphères données *A*, *B*, *C*, *D* une quelconque, (*C* par exemple), embrassoit les trois autres, auquel cas on n'auroit pas les sommets des cônes circonscrits à la sphère *C* et aux trois sphères *A*, *B*, *D*, alors on détermineroit sur la sphère *A*, un cercle du diamètre tel que $A^c B^e C^i$, en considérant deux sphères de rayons quelconque, qui toucheroient extérieurement les deux sphères *A* et *B*, et intérieurement la sphère *C*, et on construiroit les points de contact de ces sphères et de la sphère *A*; la projection de ces deux points de contact sur le plan des trois centres *A*, *B*, *C*, appartiendroit au diamètre $A B^e C^i$.

Observations Barométriques correspondantes faites en octobre 1811, *à l'Aqueduc de Marly, et dans la plaine du Vesinet.*

Par M. Puissant.

Les observations suivantes ont été faites avec deux excellens baromètres de mêmes dimensions, construits par Fortin, et que M. Hachette avoit eu la bonté de me prêter. La première expérience a été faite le 13 octobre 1811; M. Hachette observoit à la station supérieure. Les jours suivans, deux de mes amis ont bien voulu m'aider à continuer ce travail. Les observations des stations supérieure et inférieure ont toujours été faites aux mêmes heures.

Nous avons eu soin de comparer entr'eux les deux baromètres, à diverses reprises et à différentes hauteurs; ce qui nous a fait connoître la nécessité d'augmenter de $0^m,0004$ toutes les hauteurs fournies par le baromètre désigné par *E* dans le tableau (pag. 345), quantité dont la colonne de mercure qu'il renfermoit, se tenoit plus basse que celle contenue dans l'autre baromètre *A*.

Les quatre thermomètres ont été comparés de même, et trouvés parfaitement d'accord à différentes températures.

Pendant les observations, les thermomètres libres ont été élevés au-dessus du sol autant qu'il a été possible, et préservés de

l'action des rayons directs et réfléchis du soleil. Les mêmes précautions ont été prises relativement aux thermomètres et aux cuvettes des baromètres.

Tous les nombres qui sont insérés dans le tableau sont des *moyennes arithmétiques* résultantes de trois lectures successives faites à des instans convenus.

Avant d'observer les hauteurs des baromètres, on lisoit les degrés de leurs thermomètres.

Un nivellement trigonométrique, fait avec toute l'exactitude que l'on peut désirer, et qui porte avec lui sa vérification, a donné pour la différence de niveau cherché 145,5 mètres.

Malgré ces précautions, ainsi que d'autres dont il est inutile de parler, nous n'avons pu nous procurer des observations qui fussent parfaitement exemptes d'anomalies. Les seules qui paroissent réunir assez bien les conditions requises, sont les observations des 19 et 23 octobre, parce que la marche des instrumens étoit alors plus régulière, et que les variations de densité de l'air se manifestoient dans le même sens aux deux stations, tandis que le contraire avoit eu lieu le 14 et le 15 du même mois. Ainsi, la différence de niveau, déterminée par les baromètres, et conclue des quatre meilleures observations, ne diffère que de $1^{m},6$ de celle obtenue par la mesure trigonométrique.

M. Ramond, qui a discuté les cas les plus favorables à ce genre d'observations, et qui a établi des règles certaines pour les reconnoître, s'est convaincu, par un bien plus grand nombre d'expériences, de l'exactitude de la formule de M. Laplace, pour des hauteurs aussi petites que celles dont il s'agit ici. Voici ce que M. Ramond m'écrivit le 30 janvier dernier, en réponse à ce que je lui avais marqué relativement au peu de succès de nos premières observations barométriques.

« J'ai le plaisir de me trouver entièrement de votre opinion » sur la cause principale des erreurs que vous présentent vos ob- » servations barométriques de Marly. Les erreurs du baromètre » et celles que la réfraction occasionnent ont la même origine, » savoir l'intercalation ou la juxta-position de couches d'air » qui sont hors du rang que leur assigneroit leur densité. Or » les causes qui troublent la régularité du décroissement, » sont beaucoup plus fréquentes et plus énergiques à la sur- » face de la terre, et quand les deux stations du baromètre » se trouvent au niveau de grandes plaines, les indications de » cet instrument en sont souvent tellement altérés que la loi » qui sert de base à nos formules, cesse de leur devenir appli-

» cable. C'est ce que j'ai essayé de prouver dans mon second » mémoire par des raisonnemens et des exemples.

» Mais ce n'est la faute ni de la formule ni du coefficient; et » la preuve en est, que l'on mesure les plus petites hauteurs » sans difficulté et avec la plus grande exactitude, quand les » deux baromètres sont placés sur des points isolés et élevés » au-dessus du niveau des plaines. On en acquiert facilement » la preuve, sans même avoir recours aux vérifications géomé- » triques: il ne s'agit pour cela que de faire l'expérience des » trois baromètres, que j'ai rapportée et que j'ai recommandée » à la page 226 de mon Instruction. Quelle que petite que soit » la différence de niveau entre la station moyenne et la station » supérieure, elle se trouve toujours exactement mesurée par » la formule et le coefficient (pourvu que les stations soient » favorables), puisque toujours cette différence de niveau se » trouve la même, soit qu'on la déduise de la hauteur de la » station moyenne et de la station supérieure au-dessus de la » station inférieure, soit qu'on l'ait conclue directement des » observations des deux stations supérieures.

» Au reste, j'ai souvent mesuré, même en plaine, de très- » petites hauteurs, comme de cent, de cinquante, de dix mètres, » et j'ai réussi dans ces mesures. Mais il faut choisir des temps » propices, au nombre desquels je place sur-tout l'absence du » soleil, et il faut user de précautions très-scrupuleuses tant » pour s'assurer de la concordance des baromètres que pour » démêler la véritable température de l'air, etc. »

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre (1).	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trigon.
Le 13 octobre, à 3 h. ¼	Stat. inf. $0^m,7567$ E Stat. sup. $0,7432$ A	Centig. 18°,3 18°...	Centig. 18°,5 17,33	Vent N. O. léger, très-beau temps.	$152^m,7$	$147^m,5$

Hauteur de la cuvette au-dessus de la plate-forme.... $0^m,607$.
idem......... au-dessus de la plaine......... $0,450$.

(1) La comparaison des températures aux stations supérieure et inférieure, présente des [in]égalités assez considérables. On voit que le 14 octobre il y a une différence d'environ 2°,7; [le] 15, elle est de 3°,2, et le plus souvent elle s'élève à peine à 1°. Il est évident que ces iné[ga]lités ne dépendent pas seulement de la différence des hauteurs des stations supérieure et [in]férieure; le vent qui règne à la surface de la terre produit un mélange des couches d'air, et [c']est seulement dans une atmosphère calme qu'on peut admettre une relation constante [en]tre les élévations des couches d'air et leurs températures. Saussure évalue la diminution de [te]mpérature à 0°,55 par chaque élévation d'environ 88 mètres. Gay-Lussac a trouvé qu'à une [él]évation de 7016 mètres au-dessus du niveau des mers, correspondoit une différence de tem[pé]rature de 40 degrés (la température à la surface de la terre étant 30°,7). *H. C.*

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du BAROMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	RÉSULTATS Trigo.
		Centig.	Centig.			
Le 14 à 12 h. ¼	Stat. inf. 0m,7554 E	20°,5	20°.	Vent S. O. agitant un peu le mercure.	153m,5	147m,[illegible]
	Stat sup. 0 ,7422 A	20 ,3	20,7	Soleil pâle.		
à 1 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7555 E	23	22,5	Un peu plus de Soleil.	154 ,7	
	Stat. sup. 0 ,7419 A	20 ,3	20,5			

Hauteur de la surface du mercure de la cuvette au-dessus de la plate-forme. 1m,085, st. sup.
idem............................ au-dessus de la plaine...... 0 ,607, st. inf.

Le 15 à 11 h. 25′	Stat. inf. 0m,7541 E	23°,0	22°,75	Vent S. très-faible.	155m,3	147 ,5
	Stat. sup. 0 ,7404 A	19 ,8	20 ,1			
à 12 h. 25′	Stat. inf. 0 ,75399 E	24 ,15	24 ,1	Beau temps.	155 ,0	
	Stat. sup. 0 ,7405 A	22 ,0	23 ,0			

Les deux baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

Le 16 à 10 h. ¼	Stat. inf. 0m,7535 E	23°,33	22 ,5	Soleil.	153 ,5	147 ,5
	Stat. sup. 0 ,7400 A	20 ,42	20 ,3	Beau temps.		
à 11 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7537 E	23 ,0	23 ,5	Pas de vent.	157 ,0	
	Stat. sup. 0 ,7401 A	22 ,35	22 ,3			

Les deux baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

Le 18 à 2 h. ¼	Stat. inf. 0m,7609 A	25°,5	26 ,25	Très-beau temps, mais un peu de vapeurs à l'horizon.	152m,7	147m,5
	Stat. sup. 0 ,74785 E	22 ,8	26 ,5			
à 3 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7606 A	26 ,0	25 ,9	Soleil. Point de vent.	152 ,95	
	Stat. sup. 0 ,74737 E	23 ,55	25 ,0			

Hauteur de la cuvette du baromètre E au-dessus de la plate-forme... 0m,450.
idem...................... A au-dessus de la plaine........ 0 ,607.

Le 19 à 2 h. ¼	Stat. inf. 0 ,76128 A	24 ,0	24 ,6	Vent S. O. presque insensible.	149m,3	147 ,5
	Stat. sup. 0 ,7482 E	22 ,25	23 ,33			
à 3 h. ¼	Stat. inf. 0 ,761195 A	24 ,0	24 ,9	Nuages légers.	148 ,3	
	Stat. sup. 0 ,74817 E	22 ,25	23 ,33			

Les baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

Le 20 à 8 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7618 E	14 ,6	15 ,5	Brouillard épais.	150m,6	147 ,5
	Stat. sup. 0 ,7482 A	13 ,8	14 ,6			
à 9 h. ¼	Stat. inf. 0 ,7616 E	14 ,8	14 ,9	Temps calme.	149 ,8	
	Stat. sup. 0 ,74815 A	14 ,1	14 ,5			

Les baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

DATES des OBSERVATIONS.	HAUTEUR du THERMOMÈTRE.	Thermom. libre.	Thermom. du Baromètre.	ÉTAT de l'atmosphè.	RÉSULTATS Barom.	Trigon.
Le 23 à 12 h. ¼	Stat. inf. 0,74685 A Stat. sup. 0,7337 E	21°,2 19 ,0	21,2 19,6	Beau temps. Vent S.S.O. faible.	150m,6	147,5
à 1 h. ¼	Stat. inf. 0,74675 A Stat. sup. 0,7335 E	22 ,1 19 ,2	21,8 19,33		148 ,3	

Les baromètres étoient suspendus aux mêmes points.

DE LA MESURE DES HAUTEURS PAR LE BAROMÈTRE.

Démonstration élémentaire de la formule de M. Laplace.

Par M. PETIT.

Supposons l'atmosphère divisée en une suite de couches horizontales d'une épaisseur très-petite, et représentons les épaisseurs de ces couches par h, h', h''...., ces quantités pouvant être aussi petites qu'on voudra.

Soient g, g', g''...., les intensités de la pesanteur dans chacune de ces couches, intensités que nous regardons comme constantes dans toute l'étendue d'une même couche, et variables d'une couche à l'autre en raison inverse du carré de leurs distances au centre de la terre.

Soient ρ, ρ', ρ''...., les densités respectives de ces différentes couches.

Soit r le rayon de la terre, et x la température de l'atmosphère que nous supposerons constante.

Représentons enfin par P le poids de l'atmosphère jusqu'à la surface de la terre ; par P', ce même poids jusqu'à la surface supérieure de la 1ère couche; par P'' ce poids jusqu'à la surface supérieure de la 2e couche, et ainsi de suite. Les poids de ces différentes couches seront représentés par $P-P'$, $P'-P''$, $P''-P'''$, etc.; on aura donc

$$P-P'=g\rho h.\ P'-P''=g'\rho' h'.\ P''-P'''=g''\rho'' h'', \text{ etc.}$$

or on sait qu'en désignant par P la force élastique d'un gaz, par ρ sa densité, et par x sa température, on a

$$P = a\rho(1+0{,}00375\,x);$$

a étant un coefficient constant pour chaque espèce de gaz, et qui doit être déterminé par l'expérience. Faisant pour abréger $a\ (1 + 0{,}00375\ x) = m$, on aura

$$p = m\rho.\ p' = m\rho'.\ p'' = m\rho'', \text{ etc.}$$

donc,

$$p - p' = gh\frac{p}{m}.\ p' - p'' = g'h'\frac{p'}{m}.\ p'' - p''' = g''h''\frac{p''}{m}, \text{ etc.}$$

partant,

$$p' = p\left(1 - \frac{gh}{m}\right).\ p'' = p'\left(1 - \frac{g'h'}{m}\right).\ p''' = p''\left(1 - \frac{g''h''}{m}\right).$$

Supposons maintenant que les épaisseurs successives h, h', h'', soient telles, que l'on ait $gh = g'h' = g''h''$, etc., on aura $\frac{p'}{p} = \frac{p''}{p'} = \frac{p'''}{p''}$, etc, c'est-à-dire que les forces élastiques de l'air formeront une progression géométrique décroissante dont le rapport sera $1 - \frac{gh}{m}$.

L'intensité de la pesanteur étant réciproque au carré de la distance au centre de la terre, on a

$$\frac{g}{g'} = \frac{(r+h)^2}{r^2}.\ \frac{g'}{g''} = \frac{(r+h+h')^2}{(r+h)^2}.\ \frac{g''}{g'''} = \frac{(r+h+h'+h'')^2}{(r+h+h')^2}$$

par conséquent,

$$\frac{h'}{h} = \frac{(r+h)^2}{r^2}.\ \frac{h''}{h'} = \frac{(r+h+h')^2}{(r+h)^2}.\ \frac{h'''}{h''} = \frac{(r+h+h'+h'')^2}{(r+h+h')^2}$$

Or les quantités h, $(h + h')$, $(h + h' + h'')$, sont nécessairement très-petites par rapport à r; on pourra donc négliger leurs carrés, ce qui réduira les équations précédentes à celles-ci :

$$\frac{h'}{h} = \frac{r^2+2hr}{r^2}.\ \frac{h''}{h'} = \frac{r^2+2r(h+h')}{r^2+2rh}.\ \frac{h'''}{h''} = \frac{r^2+2r(h+h'+h'')}{r^2+2r(h+h')}$$

Effectuant les divisions, et négligeant les termes dans lesquels r entre à une puissance supérieure à la première dans le dénominateur, sans entrer dans le numérateur, on aura

$$h'=h\left(1+\frac{2h}{r}\right);\ h''=h'\left(1+\frac{2(h+h')}{r}\right).\ h'''=h''\left(1+\frac{2(h+h'+h'')}{r}\right).$$

On en conclura encore, en substituant successivement et négligeant toujours les termes dont le numérateur est indépendant de r, et dont le dénominateur renferme cette même lettre à des puissances supérieures,

$$h+h'=2h\left(1+\frac{h}{r}\right);$$

$$h+h'+h''=3h\left(1+\frac{2h}{r}\right),$$

$$h+h'+h''+h'''=hh\left(1+\frac{3h}{r}\right),$$

et en général

$$h+h'+h''\ldots\ldots+h^{(n-1)}=nh\left(1+\frac{(n-1)}{r}\right).$$

Si l'on suppose donc qu'on s'élève successivement dans l'atmosphère à des hauteurs

$$o.\quad h.\quad 2h\left(1+\frac{h}{r}\right).\quad 3h\left(1+\frac{2h}{r}\right)\ldots nh\left(1+\frac{(n-1)h}{1}\right)$$

Les forces élastiques de l'air correspondantes à ces différentes hauteurs seront au-dessus de la surface de la terre.

$$P.\ P\left(1-\frac{gh}{m}\right).P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^2.\ P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^3.P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^n$$

en sorte que si l'on fait

$$nh\left(1+\frac{(n-1)h}{r}\right)=H;\quad \text{et}\ P\left(1-\frac{gh}{m}\right)^n=P';$$

P' sera la force élastique de l'air à la hauteur H au-dessus de la surface de la terre.

Divisons tous les termes de la dernière série par P, on aura la progression géométrique

$$1 . \left(1-\frac{gh}{m}\right) . \left(1-\frac{gh}{m}\right)^2 \ldots \left(1-\frac{gh}{m}\right)^n = \frac{P'}{P} .$$

et comparons-lui la progression arithmétique

$$0 . 1 . 2 . 3 \ldots . n = \frac{H}{h\left(1-\frac{(n-1)h}{r}\right)} .$$

Chaque terme de cette dernière progression sera évidemment le logarithme du terme correspondant de la première, dans le système dont la base est $\left(1-\frac{gh}{m}\right)$; on aura donc, en désignant ces logarithmes par la lettre L,

$$\frac{H}{h\left(1+\frac{(n-1)h}{r}\right)} = L . \frac{P'}{P} = n.$$

Mais on a

$$nh = \frac{H}{\left(1+\frac{(n-1)h}{r}\right)}$$

Effectuant la division et négligeant toujours les termes que l'on est convenu de supprimer, il viendra

$$nh = H\left(1-\frac{(n-1)h}{r}\right), \qquad \text{d'où} \qquad nh = \frac{H\left(1+\frac{h}{r}\right)}{1+\frac{H}{r}} .$$

Remplaçant n par sa valeur, on aura

$$\frac{H}{1+\frac{H}{r}} = \frac{1}{1+\frac{h}{r}} . \, hL\left(\frac{P'}{P}\right)$$

Pour transformer le logarithme qui entre dans le second membre de cette équation en logarithme décimal, il faut le diviser par le logarithme décimal de la base $\left(1-\frac{gh}{m}\right)$.

on aura donc, en désignant ces nouveaux logarithmes par la lettre l :

$$\frac{H}{1+\frac{H}{r}} = \frac{\frac{m}{g}}{1+\frac{h}{r}} \cdot \frac{\frac{gh}{m}}{l\left(1-\frac{gh}{m}\right)} \cdot l.\left(\frac{P'}{P}\right) \cdot (a).$$

L'équation à laquelle nous venons de parvenir sera d'autant plus exacte que la quantité h sera plus petite. Elle sera donc tout-à-fait conforme à la véritable constitution de l'atmosphère, si l'on y fait h infiniment petit. Le premier facteur $\frac{\frac{m}{g}}{1+\frac{h}{r}}$ se réduit alors à $\frac{m}{g}$. Le rapport $\frac{\frac{gh}{m}}{l\left(1-\frac{gh}{m}\right)}$ devient $\frac{0}{0}$; mais il est évident qu'à cette limite il ne peut être ni nul ni infini, puisqu'alors la quantité $\frac{H}{1+\frac{H}{r}}$ seroit nulle ou infinie, quelque fut H, ce qui est absurde. De plus, ce rapport doit se réduire à une quantité négative que nous représenterons par $-K$, car le facteur $l\left(\frac{P'}{P}\right)$ est négatif, puisque P' est plus petit que P, et la quantité $\frac{H}{1+\frac{H}{r}}$ est essentiellement positive. On a donc

$$\frac{H}{1+\frac{H}{r}} = \frac{mK}{g}\, l\left(\frac{P}{P'}\right).$$

Supposons maintenant que l'on ait observé les hauteurs barométriques à la surface de la terre et à la hauteur H au-dessus de cette surface. Soient T et T' les températures du mercure aux instans de ces deux observations. (Ces températures sont

indiquées par un thermomètre en contact avec le baromètre). Le mercure se condensant de $\frac{1}{5412}$ pour un degré centigrade de diminution dans la température, il en résulte que si δ est la densité de ce fluide à la température T, c'est-à-dire à la première observation, $\delta\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)$ sera celle qui répond à la température T'; si l'on appelle donc z et z' les hauteurs barométriques observées, on aura

$$\frac{p}{p'}=\frac{gz\delta}{g'z'\delta\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)}.$$

g et g' étant les intensités de la pesanteur à la première et à la seconde station. On a d'ailleurs

$$\frac{g}{g'}=\frac{(r+H)^2}{r^2}=\left(1+\frac{H}{r}\right)^2$$

donc

$$\frac{p}{p'}=\frac{z\left(1+\frac{H}{r}\right)^2}{z'\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)}$$

par conséquent

$$H=\left(1+\frac{H}{r}\right)\left\{l\frac{z}{z\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)}+2\,l\left(1+\frac{H}{r}\right)\right\}\frac{mK}{g}.$$

Soient encore t et t' les températures de l'air à la surface de la terre et à la hauteur H (ces températures diffèrent en général des températures T et T'). Nous supposerons $x=\frac{t+t'}{2}$; enfin pour tenir compte de la quantité d'eau en vapeur que l'air contient, il est nécessaire d'augmenter un peu le coefficient 0,00375, et de le porter à 0,004 $=\frac{1}{250}$. En effet, à égalité de température, et sous la pression ordinaire de l'atmosphère, la densité de la vapeur n'est à-peu-près que les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air; l'air est donc d'autant plus léger qu'il contient plus de vapeur; or il en contient d'autant plus que la température est plus

élevée : ce qui fait que quand l'air est dilaté par la chaleur, son poids diminue dans un plus grand rapport que son volume n'augmente. Remplaçant donc m par sa valeur, on aura

$$H = \frac{aK}{g}\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right) \times$$

$$\left(l.\frac{z}{z'\left(1+\frac{(T+T')}{5412}\right)} + 2\,l\left(1+\frac{H}{r}\right)\right)\left(1+\frac{H}{r}\right).(a).$$

On déterminera le coefficient $\frac{ak}{g}$ en faisant usage d'une hauteur bien connue par des mesures trigonométriques. On prendra cette hauteur pour la valeur de H et on substituera à la place de t, t' T, T', z, z' leurs valeurs observées; on remplacera r par sa valeur 6366198 mètres. L'équation (a) déterminera alors le coefficient inconnu $\frac{ak}{g}$. En prenant une moyenne entre un grand nombre d'observations faites à la latitude de 50°, on l'a trouvée égale à 18336 mètres. Ce coefficient varie avec la latitude du lieu, à cause de la quantité g qui entre à son dénominateur. Si l'on veut avoir égard à cette variation, on aura

$$\frac{aK}{\delta} = 18336^{\text{mèt.}}\left(1 + (0{,}002837)\cos 2\,\psi\right)$$

ψ étant la latitude du lieu de l'observation.

Enfin pour résoudre l'équation (a) qui contient l'inconnue dans ses deux membres, il suffit d'observer que la quantité $\frac{H}{r}$ étant nécessairement très-petite, on peut la supposer nulle dans une première approximation. On substituera ensuite cette première valeur de H dans le second membre de l'équation (a), ce qui fournira une seconde valeur de H qui ne différera de la véritable que d'une quantité de l'ordre du carré de $\frac{H}{r}$, c'est-à-dire tout-à-fait négligeable.

OPTIQUE.

Moyens de construire par points les caustiques par réflexion, ou par refraction, dans le cas des surfaces sphériques réfléchissantes ou réfringentes.

J'ai fait voir depuis long-temps l'usage des caustiques, pour

construire par points l'image d'un objet vu par réflexion ou par réfraction, en regardant ces courbes comme les limites des polygones formés par leurs tangentes. M. Petit qui a rédigé avec soin les parties principales de l'optique, tant pour le lycée Bonaparte, que pour les élèves de l'École Polytechnique, a trouvé un moyen facile de construire par points les caustiques dues à une réflexion et à une seule réfraction. Considérant deux rayons incidens infiniment voisins, qui partent d'un point lumineux, il nomme p la partie de ces rayons comprise entre le point lumineux et la surface réfléchissante ou réfringente; il suppose que ces deux rayons d'une longueur p, après s'être réfléchis ou réfractés, se rencontrent en un point; il nomme p' la distance de ce dernier point à la surface réfléchissante ou réfringente, et il trouve une relation entre p et p' telle, que la première de ces quantités étant connue, on puisse en déduire la seconde, en sorte que chaque point de la caustique est déterminé par les deux droites p et p'. *H. C.*

Des Caustiques par réflexion.

Soit (planc. *D*, fig. *a*) P le point lumineux que nous supposerons situé dans la concavité du miroir; PM un rayon incident, et MR le rayon réfléchi correspondant; Pm est un rayon incident infiniment voisin du premier, et mr le rayon réfléchi correspondant. Le point P' intersection de ces deux rayons réfléchis consécutifs, sera un point de la caustique. Pour en déterminer la position, représentons par p la longueur du rayon incident PM, et par p' celle du rayon réfléchi $P'M$. Faisons de plus MN ou $MC = 4a$.

Si nous égalons la somme des angles du triangle PMC à celle des angles du triangle PmC, nous aurons

$$PMC - PmC = mPM - mCM;$$

or $PMC - PmC$ n'est autre chose que l'accroissement de l'angle d'incidence que nous pouvons représenter par dI; on a donc

$$dI = mPM - mCM.$$

Comparant de même les angles des triangles MCP' et mCP', on aura

$$P'MC - P'mC = mCM - mP'M;$$

or $P'MC - P'mC$ est l'accroissement de l'angle de réflexion, que nous représenterons par dR; donc

$$dR = mCM - mP'M.$$

D'ailleurs $dI = dR$; donc

$$mPM - mCM = mCM - mP'M,$$
$$MPM + mP'M = 2\,mCM.$$

Remplaçant chaque angle par l'arc qui le mesure, on aura

$$\frac{Mm + Nn}{2} + \frac{Mm + Rr}{2} = 2\,Mm.$$

Réduisant $Nn + Rr = 2\,Mm$;
or, les trois arcs Mm, Nn, Rr étant infiniment petits, on a

$$Nn = Mm.\frac{4a - p}{p}, \text{ et } Rr = Mm.\frac{4a - p'}{p'}.$$

Substituant et divisant par Mm, on trouve

$$\frac{4a - p}{p} + \frac{4a - p'}{p'} = 2,$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a};$$

d'où l'on tire

$$p' = \frac{ap}{p - a}.$$

Lorsque a sera le quart du diamètre, p et p' seront les distances des foyers conjugués au miroir.

Il est facile de s'assurer que les quantités p et p' doivent être prises positivement lorsque les lignes qu'elles représentent sont dirigées dans la concavité du miroir, et négativement dans le cas contraire.

En considérant la sphère entière du miroir, le plan mené par le point lumineux perpendiculairement à l'axe du miroir divise ce miroir en deux parties telles, que le point lumineux est pour l'une de ces parties, situé entre le centre et la surface, et pour l'autre au-delà du centre. Les branches de caustiques qui correspondent à ces parties du miroir, ont évidemment pour tangente commune le rayon réfléchi correspondant au rayon incident perpendiculaire à l'axe. Ces rayons sont alors égaux entr'eux et à $2\,a$; le point correspondant de la caustique est évidemment un point de rebroussement.

Si la caustique doit avoir une asymptote, p' sera infini; on aura donc $\frac{1}{p} = \frac{1}{a}$; donc $p = a$; c'est-à-dire que le rayon

incident qui se réfléchira suivant l'asimptote, devra être le quart de la corde totale. On peut le construire de la manière suivante :

Soit (pl. *D*, fig. *b*) *P* le point lumineux qui doit être dans la concavité du miroir, puisque p est positif. On prendra $PB = PC$, et sur *PB* comme diamètre, on décrira un cercle qui coupera le miroir aux points *M* et *M'*; les lignes *PM* et *P'M'* seront les rayons qui se réfléchiront suivant les asimptotes *MK*, *M'K'*. En effet, si l'on abaisse *CD* perpendiculaire sur *PM*, les triangles *BMP*, *CPD* seront égaux ; donc *PM* sera égal à *PD*, ou à la moitié de *MP*, ou enfin au quart de *MN*.

Cette construction fait voir que la caustique ne peut avoir d'asimptotes, ou, ce qui revient au même, de branches infinies, que dans le cas où la distance *PC* est plus grande que la moitié du rayon.

Des Caustiques par réfraction.

Soient (pl. *D'*, fig. *c*) *P* le point lumineux ; *PM*, *Pm* les deux rayons incidens infiniment voisins, qui se réfractent suivant deux droites *MS*, *mS*, qui se coupent au point *P'* de la caustique par réfraction.

Nommant r le rayon *CM* de la sphère, p le rayon incident *PM*, p' le rayon réfracté *MP'*, l le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, $2a$ la corde *MN* du cercle dont le rayon est r, et qui est dans la direction du rayon de lumière *PM*, $2b$ la corde *MS* dirigée suivant le rayon réfracté *MS*, I l'angle d'incidence, R l'angle de réfraction, on a entre les quantités I, R, l, a, b, r, les relations suivantes :

$$(1)\ l = \frac{\sin I}{\sin R}, \qquad \begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\left\{\begin{matrix} a = r\cos I, \\ b = r\cos R.\end{matrix}\right.$$

$$dI = MPm + MCm = \frac{Mm + Nn}{2}$$

$$dR = MCm - MP'm = \frac{Mm - Ss}{2}.$$

Considérant les petits arcs *Mm*, *Nn*, *Ss*, comme les cordes d'un même cercle, on a les proportions suivantes :

$$p : p + 2a :: Mm : Nn = \frac{p + 2a}{p} \cdot Mm.$$

$$p' : 2b - p' :: Mm : Ss = \frac{2b - p'}{p'} \cdot Mm.$$

Substituant ces valeurs de Nn et Ss, on a

$$dI = \frac{p+a}{p}.Mm, \qquad dR = \frac{p'-b}{p'}.Mm.$$

L'équation (1) donne

$$\frac{dI}{dR} = \frac{l\cos R}{\cos I} = \frac{pp'+ap'}{pp'-pb}$$

mettant pour $\frac{\cos R}{\cos I}$ sa valeur tirée des équations (2), (3), on a

(4) $$bl - a = \frac{a^2}{p} + \frac{b^2 l}{p'}.$$

Nommant c la tangente menée par le point lumineux P au cercle du rayon CM, on a

(5) $$c^2 = p(p+2a),$$

ayant cinq équations entre les six quantités I, R, a, b, p, p', la valeur de l'une d'elles, de p' par exemple, sera déterminée lorsqu'on donnera la valeur de p.

Les signes des rayons p et p', l'un incident, et l'autre réfracté, dépendent de leur position par rapport à la surface refringente. Lorsque ces rayons sont du même côté par rapport à cette surface, ils sont de signes différens, et ils sont de mêmes signes dans le cas contraire.

Examen de l'équation (4), dans quelques cas particuliers.

(4) $$bl - a = \frac{a^2}{p} + \frac{b^2 l}{p'}.$$

1° On suppose $a = b = r$;

Dans cette hypothèse, l'extrémité de p' est le point conjugué du point d'où part le rayon p; l'équation (4) devient

$$\frac{l-1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{l}{p'}.$$

2°. Le rayon incident se confond avec la tangente PM (fig. d) menée par le point lumineux P.

Dans ce cas $a = o$, et $p' = b$; c'est-à-dire que le point P' milieu de la corde $MS = 2b$, appartient à la caustique.

3°. r est infini.

Substituant dans l'équation (4) pour a et b leurs valeurs $r\cos I$, $r\cos R$, et supposant $r=\infty$, elle donne

$$\frac{\cos^2 I}{p}+l\frac{\cos^2 R}{p'}=0. \qquad (6)$$

Les valeurs de p et p' étant nécessairement de signes différens, on doit conclure que le point lumineux et la caustique sont du même côté de la surface réfringente.

4°. Pour avoir le point de rebroussement de la caustique, il faut supposer dans l'équation (6), $I=0$, et par conséquent $R=0$; on a alors $p'=-pl$, c'est-à-dire, que les distances du point lumineux et du point de rebroussement de la caustique à la surface réfringente, sont dans le rapport de l à 1.

M. Hassenfratz a fait graver, pour l'usage de l'Ecole Polytechnique, deux planches de caustiques, d'après les dessins de M. Girard. La première planche contient six caustiques par réflexion, et la seconde douze caustiques par réfraction. Les points singuliers de ces courbes ont été déterminés par les constructions qui résultent de l'analyse précédente de M. Petit.

H. C.

MÉCANIQUE.

Sur les Axes principaux, par M. LEFEBURE DE FOURCY *répétiteur-adjoint de l'École Polytechnique.*

L'on sait de quelle importance sont en mécanique *les axes principaux* des corps. La propriété d'être des *axes naturels de rotation* les caractérise de la manière la plus saillante. On les détermine encore lorsqu'on cherche les axes par rapport auxquels *le moment d'inertie* est un *maximum* ou un *minimum*. Enfin, l'on peut les considérer comme *formant un système de coordonnées orthogonales par rapport auquel la somme des produits de chaque molécule par le rectangle de deux quelconques de ses coordonnées est égale à zéro*. Cette propriété, qui sert immédiatement à simplifier les équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, va nous faire trouver les axes principaux, par un calcul qui réunit la symétrie à la simplicité.

Concevons par un point quelconque O d'un corps solide, trois

axes OX, OY, OZ, formant un système de coordonnées rectangulaires ; soient

$$x=az, y=bz;\ x=a'z, y=b'z;\ x=a''z, y=b''z;$$

les équations de trois droites OX', OY', OZ' formant un nouveau système d'axes rectangulaires, l'on aura

$$1+aa'+bb'=0, 1+aa''+bb''=0, 1+a'a''+b'b''=0 \quad (1).$$

Pour que ces droites soient les axes principaux du corps, il faut, en désignant par x', y', z', les coordonnées d'une molécule quelconque μ relativement aux axes OX', OY', OZ', que l'on ait encore

$$\int . x'y'\mu=0, \int . x'z'\mu=0, \int . y'z'\mu=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

l'intégration devant embrasser toute l'étendue du corps.

Pour développer ces équations, je nommerai x, y, z, les coordonnées de la molécule μ relativement aux axes OX, OY, OZ; D la droite qui joint cette molécule à l'origine, et par δ l'angle formé par cette ligne avec l'axe OX', l'on aura

$$x'=D\cos\delta$$

l'on obtiendra $\cos\delta$ en remarquant que la droite D fait avec OX, OY et OZ, des angles qui ont pour cosinus $\frac{x}{D}$, $\frac{y}{D}$, $\frac{z}{D}$; que les cosinus des angles analogues formés par OX' sont $\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, et que par suite l'on a $\cos\delta=\frac{ax+by+z}{D\sqrt{1+a^2+b^2}}$; donc l'on a $x'=\frac{ax+by+z}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$; l'on a de même $y'=\frac{a'x+b'y+z'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$, et $z'=\frac{a''x+b''y+z}{\sqrt{1+a''^2+b''^2}}$.

D'après ces valeurs, si l'on pose, pour abréger,

$$\int . x^2\mu=f, \int . y^2\mu=g, \int . z^2\mu=h, \int . xy\mu=f', \int . xz\mu=g', \int . yz\mu=h',$$

les équations (α) deviendront

$$\left.\begin{array}{l} aa'f+bb'g+h+(ab'+a'b)f'+(a+a')g'+(b+b')h'=0 \\ aa''f+bb''g+h+(ab''+a''b)f'+(a+a'')g'+(b+b'')h'=0 \\ a'a''f+b'b''g+h+(a'b''+a''b')f'+(a'+a'')g'+(b'+b'')h'=0 \end{array}\right\}(2)$$

Ces équations réunies aux équations (1), déterminent en général les six quantités a, b, a', b', a'', b''. Pour arriver à l'équation finale en a, multiplions la première des équations (2) par a'', la deuxième par a', et retranchons celle-ci de la précédente ; multiplions-les ensuite par b'' et b', et retranchons encore la deuxième de la première, il viendra

$$A\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} b\,(a'b''-a''b')f+(a'-a'')h+a\,(a'b''-a''b')f' \\ +a\,(a'-a'')g'+b\,(a'-a'')h'+(a'b''-a''b')h'=0 \end{array}\right.$$

$$B\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a(a'b''-a''b')f-(b-b'')h+b\,(a'b''-a''b')f' \\ -a\,(b'-b'')g'+(a'b''-a''b')g'-b\,(b'-b'')h=0 \end{array}\right.$$

Les mêmes opérations faites sur les deux premières équations (1) donnent

$$A'\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (a'-a'')+b\,(a'b''-a''b')=0$$

$$B'\ldots\ldots\ldots\ldots-(b'-b'')+a\,(a'b''-a''b')=0$$

Entre les équations A et A' éliminant $a'-a''$ et $a'b''-a''b'$; entre B et B' éliminant pareillement $b'-b''$ et $a'b''-a''b'$, l'on trouve

$$bg-bh+af'-abg'-b^2h'+h'=0 \text{ et } af-ah+bf'-a^2g'+g'-abh'=0.$$

la dernière de ces équations donne

$$b=\frac{a^2g'+a\,(h-f)-g'}{f'-ah'};$$

Cette valeur mise dans la première conduit à l'équation finale

$$F\ldots-h'\{a^2g'+a\,(h-f)-g'\}^2+\{g-h-ag'\}\{a^2g'+a(h-f)-g'\}+\{af'+h'\}\{f'-ah'\}^2=0$$

Cette équation paroît être du quatrième degré ; mais il est facile de voir que le coefficient de a^4 est nul : ainsi elle n'est que du troisième ; donc elle donnera pour a au moins une valeur

réelle, et par suite une valeur réelle pour b. En substituant ces valeurs de a et de b dans la première des équations (1) et (2), l'on aura pour a' et b' des valeurs réelles qui, substituées à leur tour dans la dernière des équations (1) et (2), feront trouver aussi des valeurs réelles pour a'' et b''. Donc pour chaque point d'un corps, il existe toujours un système d'axes principaux.

Les équations (1) et (2) étant symétriques relativement aux inconnues, il s'ensuit que l'équation F doit donner les valeurs de a, a' et a'' ; mais elle n'est que du troisième degré; donc, en général, il n'y a qu'un système d'axes principaux.

Cependant il y a des cas particuliers où il peut en exister plusieurs. La discussion de ce cas est facile, et peut se faire de plusieurs manières; nous ne nous y arrêterons pas.

Des Polygones et des Polyèdres.

M. Cauchy, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, ingénieur des Ponts et Chaussées, a présenté à l'Institut, en février 1811 et janvier 1812, deux beaux mémoires sur les polygones et les polyèdres ; ils seront imprimés dans le seizième cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique de cette année. On connoîtra l'objet de ces deux mémoires, par les rapports suivans que la Classe de l'Institut a approuvés.

Rapport sur un Mémoire de M. Cauchy, *concernant les Polyèdres, par M. Malus* (6 *mai* 1811).

La classe nous a chargés, M. Le Gendre et moi, de lui rendre compte d'un mémoire de M. Cauchy, renfermant différentes recherches sur les polyèdres.

Ce mémoire est divisé en deux parties. Dans la première, M. Cauchy démontre qu'il n'existe pas d'autres polyèdres réguliers, que ceux dont le nombre des faces est 4, 6, 8, 12 ou 20.

M. Poinsot, dans un mémoire où il a donné la description de polygones et de polyèdres d'une espèce supérieure à celle qu'on a coutume de considérer, avoit déjà observé qu'on pouvoit former tous les polygones d'espèce supérieure, en prolongeant les côtés des polygones réguliers de première espèce. C'est en géné-

ralisant les principes renfermés dans le mémoire de M. Poinsot, que M. Cauchy est parvenu à faire dériver les polyèdres réguliers d'espèce supérieure de ceux de première espèce, ce qui l'a conduit d'une manière simple et analytique à la solution de la question qu'il s'étoit proposée.

Il commence par prouver que, dans un ordre quelconque, on ne peut construire des polyèdres réguliers d'une espèce supérieure, qu'autant qu'ils résultent du prolongement des arêtes ou des faces des polyèdres réguliers du même ordre et de première espèce qui leur servent de noyau, et que, dans chaque ordre, les faces des polyèdres d'espèce supérieure doivent avoir le même nombre de côtés que celles des polyèdres de première espèce.

Il suit de là que, comme il n'y a que cinq ordres de polyèdres réguliers de première espèce, on ne doit chercher que dans ces cinq ordres, des polyèdres réguliers d'espèce supérieure; en sorte que tous les polyèdres réguliers, de quelque espèce qu'ils soient, doivent être des tétraèdres, des hexaèdres, des octaèdres, des dodécaèdres ou des icosaèdres.

Après avoir donné la solution principale, M. Cauchy examine combien chaque ordre renferme d'espèces différentes, et il conclut de ses recherches qu'on ne peut former de polyèdres réguliers d'espèce supérieure que les quatre décrits par M. Poinsot.

Dans la seconde partie de son mémoire, M. Cauchy généralise un théorême d'Euler, relatif à l'équation qui existe entre les différens élémens qui composent la surface d'un polyèdre.

Euler avoit démontré que le nombre des sommets ajouté à celui des faces surpassoit de deux unités le nombre des arêtes.

M. Cauchy a étendu ce théorême de la manière suivante :

Si on décompose un polyèdre en tant d'autres que l'on voudra, en prenant à volonté dans l'intérieur de nouveaux sommets, la somme faite du nombre des sommets et de celui des faces surpassera d'une unité la somme faite du nombre des arêtes et de celui des polyèdres.

Le théorême d'Euler n'est qu'un cas particulier de celui-ci, dans lequel on suppose qu'on ne considère qu'un seul polyèdre.

M. Cauchy, en décomposant le polyèdre, déduit de son théorême général un second théorême relatif à la géométrie plane. Si on prend une des faces du polyèdre pour base, et si on transporte sur cette face tous les autres sommets sans changer leur nombre, on obtient une figure plane composée de plusieurs polygones renfermés dans un contour donné. Dans ce cas, la somme faite du

nombre des polygones et de celui des sommets surpasse d'une unité le nombre des droites qui forment les côtés de ces polygones. M. Cauchy parvient directement à ce résultat, en égalant à zéro, dans son théorême général, la quantite qui represente le nombre des polyèdres. Ce second théorême est, dans la géométrie plane, l'équivalent du premier dans la géométrie des polyèdres.

Les démonstrations sur lesquelles M. Cauchy appuie ses théorêmes sont rigoureuses et exposées d'une manière élégante. Vos commissaires pensent que ces considérations sur les polygones et les polyèdres sont assez curieuses et assez neuves pour intéresser les géomètres, et que le mémoire de M. Cauchy mérite d'être approuvé par la classe et imprimé dans le Recueil des Savans étrangers.

Rapport fait par M. Le Gendre ; 17 février 1812.

Il y a environ un an que M. Cauchy présenta à la classe un mémoire portant le même titre que celui-ci, dont l'objet étoit de généraliser un théorême d'Euler et de compléter la théorie d'une nouvelle espèce de polyèdres réguliers, découverte par M. Poinsot. Ce mémoire obtint l'approbation de la classe sur le rapport de M. Malus. On le regarda comme le fruit d'un talent déjà exercé, et qui devoit par la suite obtenir de plus grands succès. J'engageai alors l'auteur à continuer ses recherches sur les polyèdres, dans la vue de démontrer un théorême intéressant que supposent les définitions 9 et 10 du 11ᵉ livre d'Euclide, et qui n'est pas encore démontré.

Ce théorême dont j'ai parlé fort au long dans les notes de ma géométrie, et auquel j'ai ajouté la restriction nécessaire, pour qu'il ne fût pas sujet à l'objeotion faite par Robert Simson dans son édition des Élémens d'Euclide, peut s'énoncer de la manière suivante :

« Deux polyèdres *convexes* sont égaux lorsqu'ils sont compris » sous un même nombre de polygones égaux chacun à chacun, » et disposés entr'eux de la même manière. »

Le sens de ce théorême est qu'un polyèdre convexe étant donné, il est impossible de faire varier les inclinaisons mutuelles des plans qui le terminent, de manière à produire un second polyèdre convexe compris sous les mêmes faces et dis-

posé de la même manière ; on peut bien former un second polyèdre symétrique au premier et qui lui soit égal dans toutes ses parties constituantes, mais les faces y seroient disposées dans un ordre inverse autour de chaque angle solide, et ces deux solides ne pourroient être superposés. Ainsi ce cas ne fait aucune exception à la proposition générale.

C'est sans doute un problême plus que déterminé, que celui de construire un polyèdre avec des faces données et assemblées suivant un ordre donné ; mais l'analyse ne s'applique pas avec succès à ce genre de problême, il n'y a pas précisément de caractère analytique qui distingue un polyèdre convexe d'un polyèdre qui a des angles rentrans. D'ailleurs l'analyse d'où l'on devroit conclure qu'un seul polyèdre satisfait à la question, ne manqueroit pas d'être extrêmement compliquée. Il faut donc savoir en pareil cas se tracer une route particulière pour parvenir à la solution ; ce n'est que par une profonde méditation du sujet et par des réductions à l'absurde qu'on peut espérer de réussir dans ces sortes de recherches qui, pour la difficulté et pour le genre de méthodes, ont quelque analogie avec celles qui s'offrent à chaque pas dans la théorie des nombres.

En donnant une idée de la difficulté de la question que nous avions proposée à M. Cauchy, nous mettons la classe à portée d'apprécier le mérite de la solution qu'il en a donnée dans le mémoire dont nous avons à rendre compte.

Ce mémoire est divisé en deux parties : la première contient huit théorêmes sur les polygones convexes rectilignes ou sphériques. La seconde en contient cinq sur les angles solides et les polyèdres convexes. Mais ce dernier est l'objet principal du Mémoire, et les autres ne doivent être considérés que comme des lemmes nécessaires à la démonstration de celui-ci.

Dans la première partie, l'auteur considère les variations qui peuvent avoir lieu dans les angles d'un polygone convexe, rectiligne ou sphérique, dont les côtés demeurent constans. Si le polygone n'avoit que trois côtés, il ne pourroit y avoir aucune variation dans les angles. Ainsi on suppose constamment que le polygone a au moins quatre côtés ; alors on voit que sans cesser d'être convexe, il peut, en conservant les mêmes côtés, prendre une infinité de formes différentes. J'avois donné deux propositions sur cet objet dans la première édition de ma Géométrie ; M. Cauchy a porté jusqu'à huit le nombre de ces propositions, et les a démontrées d'une manière qui lui est propre.

Dans la seconde partie, l'auteur applique d'abord aux angles solides les résultats qu'il avoit trouvés pour les polygones sphé-

riques. Les deux théorêmes qu'il donne à cet effet peuvent être compris dans l'énoncé suivant :

« Si les angles plans qui composent un angle solide convexe à
» plus de trois faces, demeurent constans et qu'on fasse varier
» d'une manière quelconque les inclinaisons mutuelles de ces
» plans, ou, pour abréger, les inclinaisons sur les arêtes, si
» on met ensuite sur chaque arête le signe + ou le signe —, se-
» lon que l'inclinaison sur cette arête augmente ou diminue, et
» qu'on ne mette aucun signe aux arêtes sur lesquelles l'incli-
» naison ne varieroit pas, je dis qu'on trouvera au moins quatre
» variations de signe en faisant le tour de l'angle solide. »

De là M. Cauchy passe aux théorêmes 11, 12 et 13, sur les polyèdres convexes. Le théorême 11 n'est autre chose que le théorême d'Euler connu par la notation $S + H = A + 2$. Le théorême 12 est une extension fort remarquable du théorême d'Euler au cas où les faces au lieu d'être planes, seroient considérées simplement comme des espaces terminés par plusieurs droites non situées dans le même plan. En effet, si chacun de ces espaces compte pour une face, si en même temps les angles solides continuent d'être convexes, il n'y a aucun changement à faire à la démonstration du théorême d'Euler, telle que je l'ai donnée dans ma Géométrie, et on parvient toujours à l'équation $S + H = A + 2$.

Pour venir enfin à la démonstration du théorême 13, qui est l'objet principal de ce Mémoire, l'auteur suppose d'abord qu'on fasse varier à-la-fois les inclinaisons sur toutes les arêtes. Cette supposition ne pourroit avoir lieu à l'égard des angles solides triples qui sont invariables; mais dans tout polyèdre donné on peut supprimer les angles solides triples, et le théorême ne sera à démontrer que pour les polyèdres dont tous les angles solides sont composés de quatre angles plans ou plus.

Supposant donc avec l'auteur que les inclinaisons sur les arêtes varient toutes à-la-fois, cherchons combien il y a de variations de signe d'une arête à la suivante. Il y a deux manières de compter ces variations; l'une en les considérant successivement sur les divers angles solides, l'autre en les considérant sur les diverses faces. On est d'ailleurs assuré que le nombre total, estimé d'une manière ou de l'autre, sera toujours le même ; car deux arêtes consécutives qui appartiennent à l'un des angles solides, appartiennent en même temps à l'une des faces, *et vice versâ*.

Cela posé, puisqu'en vertu du théorême rapporté ci-dessus on doit compter au moins quatre variations autour de chaque

angle solide, le nombre cherché N devra au moins être égal à $4\,S$, de sorte qu'on aura $N > 4\,S$. C'est la première limite de N.

En second lieu, si on examine les successions de signes placés sur les côtés de chacune des faces et qu'on estime les variations au plus grand nombre possible, on trouve que dans un triangle le nombre des variations ne peut être plus grand que 2; que dans un quadrilatère et dans un pentagone il ne peut surpasser 4; que dans un hexagone et dans un heptagone il ne peut surpasser 6, et ainsi de suite. Donc, si la surface du polyèdre est composée de a triangles, de b quadrilatères, de c pentagones, etc., le nombre total des variations ne pourra être plus grand que $2\,a + 4\,b + 4\,c + 6\,d + 6\,e +$ etc.

Mais il est facile de voir, au moyen de l'équation $S + H = 2$, que la quantité précédente est moindre, ou tout au plus égale à $4\,S - 8$. Donc on auroit à-la-fois $N > 4\,S$ et $N < 4\,S - 8$; résultat absurde, et nous conclurons qu'il est impossible que les inclinaisons sur les arêtes varient toutes à-la-fois dans le polyèdre donné.

Supposons maintenant que les inclinaisons sur quelques-unes des arêtes demeurent constantes, tandis que les autres varient; si on supprime toutes les arêtes où l'inclinaison ne varie pas, on supprimera en même temps des parties de la surface du polyèdre proposé, qui ne seront sujettes à aucune variation, et on aura un polyèdre nouveau, dont toutes les faces ne seront point planes, mais qui tombera dans le cas du théorême 12, et qui, par conséquent, satisfera encore à l'équation :

$S + H = A + 2$, entendant par H le nombre total des faces, soit planes, soit terminées par une suite de droites non situées dans un même plan.

Ayant ainsi réduit le polyèdre proposé à un autre dans lequel les inclinaisons sur les arêtes varient toutes à-la-fois, on retombe dans le premier cas, et on conclut de même que la figure du polyèdre est invariable.

Il est donc démontré que deux polyèdres convexes sont égaux et peuvent être superposés, lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de polygones égaux chacun à chacun, et disposés de la même manière dans les deux solides.

Nous voulions ne donner qu'une idée de la démonstration de M. Cauchy, et nous avons rapporté cette démonstration presque toute entière. Nous avons ainsi fourni une preuve plus évidente de la sagacité avec laquelle ce jeune géomètre est parvenu à vaincre une difficulté qui avoit arrêté des maîtres de l'art, et

qu'il étoit important de résoudre pour le perfectionnement de la théorie des solides. Nous pensons, en conséquence, que ce Mémoire mérite d'être approuvé par la classe et imprimé dans le Recueil des Savans étrangers.

Signé BIOT, CARNOT, LE GENDRE, *rapporteur*.

La classe approuve le rapport et en adopte les conclusions.

---

§. II.

ANNONCES D'OUVRAGES.

Rapport du Conseil de Perfectionnement de l'Ecole Impériale Polytechnique, session de 1811 *à* 1812.

Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction de cet établissement, 7e. et 8e. cahiers; 1 vol. in-4°.

Ce cahier contient les leçons de mathématiques données à l'ancienne Ecole Normale, par MM. LAGRANGE et LAPLACE, et un Mémoire sur le contact des sphères, par FERMAT, trad. du latin par M. HACHETTE.

Traité de Mécanique, par M. POISSON, 2 vol. in-8°.

Sommaires des Leçons du Cours de Mécanique de M. PRONY; 1 vol. in-4°.

Supplément de la Géométrie descriptive de MONGE, par M. HACHETTE, 1 vol. in-4°.

Uranographie, ou *Traité Elémentaire d'Astronomie*, par M. FRANCŒUR; 1 vol. in-8°.

Sidérotechnie, ou l'Art d'extraire la fonte, le fer, l'acier, des minerais qui les contiennent, par M. HASSENFRATZ, 4 vol. in-4°., et 80 planches.

Mémoire sur les Tribus arabes des déserts de l'Egypte; Mémoire sur les branches du Nil, par M. DUBOIS AIMÉ, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, directeur des douanes à Livourne.

Dictionnaire historique de Musique, par M. CHORON, ancien élève de l'Ecole Polytechnique; 2 vol. in-8°.

M. GAULTIER, Professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts, a présenté à l'Institut un Mémoire fort intéressant sur les contacts des sphères. On en rendra compte dans le prochain cahier.

§. III.

PERSONNEL.

M. Durivau, chef de bataillon du Génie, a été nommé, par décret impérial du 17 avril 1812, directeur des Etudes de l'Ecole Polytechnique. M. le baron de Vernon, qui occupoit cette place, a été admis à la retraite.

M. Poisson a été nommé par Sa Majesté, Examinateur de l'Artillerie, le 18 avril 1812, et Membre de l'Institut, le 23 mars même année.

M. Etienne-Louis Malus, major au corps impérial du Génie, Membre de la Légion d'Honneur, de l'Institut impérial de France, nommé provisoirement Directeur des Etudes de l'Ecole Polytechnique, est décédé le 23 février 1812, âgé de 37 ans. Les Elèves présens à ses funérailles ont entendu avec émotion et attendrissement les éloges prononcés sur sa tombe par

MM. Biot, Delambre, et Couche, major du Génie. En rappelant cette scène de douleur, qu'il soit permis de citer une partie du discours lu par M. Couche, au nom du comité des Fortifications. Les Elèves qui n'ont pas eu l'avantage de connoître M. Malus, sauront l'apprécier comme le modèle des officiers que l'Ecole Polytechnique a pour objet de former.

« Le comité de fortifications vient mêler ses regrets à ceux de l'Institut et de l'Ecole Polytechnique, et déplorer avec eux la mort prématurée d'un digne successeur des Meunier, des Coulomb, de ces hommes que le corps du génie se glorifie d'avoir élevés pour les progrès des sciences qui le guident et l'éclairent dans ses travaux. C'est au corps illustre qui dirige ces progrès vers la gloire et l'utilité de l'Etat, à dire par quelles brillantes découvertes Malus a, sur les traces de Newton, reculé les bornes de l'optique. Cette première Ecole du monde rappellera ce que ses examens, les discussions de ses conseils et la direction de ses études, doivent à Malus, à la profonde intelligence des rapports qui unissent les sciences aux arts de l'ingénieur. Ses camarades ne peuvent que préluder à ces éloges, par le tableau simple et rapide de ses services militaires. Ils l'ont vu, soldat et travaillant aux fortifications de Dunkerque, venir se placer parmi les chefs de brigade de l'Ecole Polytechnique, instruire les autres en s'instruisant, et prendre enfin dans le corps du génie le rang que lui assignoient l'éclat et le succès de ses études. Toujours brave, savant, estimé de ses chefs et cher à ses camarades, il a partagé leurs périls aux armées de Sambre-et-Meuse, du Nord et d'Egypte; aux batailles de Chebriès, des Pyramides, d'Héliopolis et de Coraïm; aux siéges d'El-Arish, de Jaffa et du Caire. L'armée d'Orient l'a vu à Jaffa braver la peste pour établir les hôpitaux de l'armée, souffrir tous les maux de cette horrible contagion, et n'en guérir que pour sacrifier de nouveau sa vie à son devoir. Ce devoir, sous ce climat brûlant, n'épuisoit point son ardeur, et dans les loisirs de son service, il coopéroit à ces travaux par lesquels les sciences et les arts s'efforçoient de créer des ressources à l'armée et s'associoient à sa gloire. A son retour, dans les sous-directions d'Anvers, de Kehl et de Paris, au comité des fortifications, soit qu'il fallût asseoir des travaux, discuter des projets, ou résoudre ces questions d'art qui exigent tous les secours de la théorie et de l'expérience, par-tout il a déployé ces mêmes lumières et ce même sentiment de son devoir, qui soumettoient aux détails de son service ses plus glorieux travaux dans les sciences. »

Promotions des anciens Elèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs. (*Voyez* les premières promotions, pag. 297 de ce volume.)

Artillerie.

Chefs de bataillon, MM. Desclaibes-D'Hust. — Leclerc. — Lunel. — Châteaubrun.

Génie Militaire.

Chefs de bataillon, MM. Durivau. — Michaud. — Marion. — Jules Foucault. — Thiébaut. — Guiraud. — Roux-la-Mazelière. — Ménissier.

Génie Maritime.

Ingénieurs de Marine (*), MM. Chaumont, en 1809. — Boucher, en 1810. — Greslé. — Ledean. — Tupinier, en 1811.

Ponts-et-Chaussées.

Ingénieurs en chef. MM. Duval. — Favier. — Polonceau. — Le Payen. — Lescure Belle-Rive. — Coic. — Derrien. — Eustache. — Fouques-Duparc. — Pattu. — Cordier.

Faculté des Sciences de Paris.

Les candidats au doctorat, qui ont obtenu ce grade après avoir soutenu les thèses exigées de mécanique et d'astronomie, sont au nombre de trois, savoir : M. Bourdon, professseur au lycée Charlemagne, MM. Lefebure-Fourcy et Petit, répétiteurs à l'Ecole Impériale Polytechnique.

(*) Ont le rang et la décoration de chef de bataillon.

CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

La douzième session du Conseil de Perfectionnement a été ouverte le 22 novembre 1811 et terminée le 10 mai 1812.

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole, Président.

S. Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics, membres désignés par la loi.

MM. Legendre, Lacroix, Malus, Descotils.

Membres de l'Institut National, pris, selon la loi, dans la classe des Sciences physiques et mathématiques.

MM. les comtes Laplace, Lagrange, Berthollet.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre.

M. le baron Eblé, général de division d'artillerie; MM. Allent, officier supérieur du génie; Puissant, officier supérieur au corps impérial des ingénieurs géographes; Riffault, administrateur général des Poudres et Salpêtres.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine.

M. le comte Sugny, inspecteur-général d'artillerie de marine, M. le baron Sané, inspecteur-général du génie maritime.

Nota. M. le comte Sugny n'étant pas à Paris, a été remplacé par M. le général Thirion, inspecteur-adjoint d'artillerie de marine.

Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur.

MM. Girard ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Lelièvre, inspecteur-général des Mines.

Directeur des études de l'Ecole Polytechnique.

M. Durivau.

Commissaires choisis par le Conseil d'Instruction de l'Ecole, parmi ses Membres.

MM. Monge, comte de Péluse, Poisson, Ampère, Duhays.

Secrétaire du Conseil.

M. Marielle, capitaine quartier-maître de l'Ecole Polytechnique.

Extrait du Rapport fait au Conseil d'Instruction de l'Ecole Polytechnique, sur les travaux du Conseil de Perfectionnement pendant la session de 1811 *et* 1812.

Par M. Durivau, Directeur des Etudes.

22 mai 1812.

Le Conseil de Perfectionnement a tenu cinq séances. Les trois premières ont été consacrées à l'examen des programmes de l'enseignement et des livres à l'usage de l'Ecole. Le Conseil a reconnu qu'il étoit indispensable d'assigner plus de temps aux études, et sur-tout aux exercices des arts graphiques. Cette extension réduisant à un très-petit nombre de leçons les cours de constructions et d'art militaire, il a pensé qu'il valoit mieux supprimer le cours de constructions, et convertir le cours d'art militaire en un cours d'application de la géométrie descriptive et de la topographie aux arts de l'ingénieur et au service de l'officier. Dans la quatrième séance, on a entendu la lecture des observations faites par le Conseil de l'Ecole d'Artillerie et du Génie de Metz, sur l'enseignement de l'Ecole Polytechnique. La Commission chargée de les examiner, les reconnoît fondées; et sur sa proposition, le Conseil de Perfectionnement a adopté la conclusion suivante : 1°. Que les Elèves feroient un plus grand nombre d'épreuves de géométrie descriptive, de machines et de topographie; 2°. que MM. les professeurs de topographie de Metz seroient invités à se concerter avec MM. les professeurs des ingénieurs-géographes, pour que la méthode d'enseignement de la topographie fût uniforme dans tous les services. Dans cette même séance, M. Duhays a annoncé qu'il travailloit à la rédaction de ses leçons sur l'art militaire. Son Excellence le Président du Conseil donne à M. le quartier-maître un témoignage de son contentement pour les talens et le zèle qu'il apporte dans l'exer-

cice de ses fonctions. Le Conseil a invité Son Excellence le Ministre de l'Intérieur à décider que M. Sganzin, dont le cours des constructions étoit supprimé, continueroit à jouir du titre de professeur. Cette disposition a été approuvée. (*Lettre de S. E. le Ministre de l'Intérieur à M. le Comte de Cessac, 22 février* 1812.)

Le Conseil accorde à M. Poinsot le titre de professeur-adjoint. Il accorde ce même titre à M. Arago, et règle la part qu'il prendra à l'enseignement; elle consiste à faire le cours de géodésie pour la première division, et à alterner avec M. Hachette, tant pour les leçons de géométrie descriptive, que pour celles d'analyse appliquée à la géométrie.

Dans la cinquième séance, le Conseil a entendu le rapport à Sa Majesté, sur les derniers travaux, et sur la situation de l'Ecole Polytechnique. Ce rapport, rédigé par M. le chevalier Allent, comprend les deux sessions de 1810 à 1811, et de 1811 à 1812; il est terminé par le tableau suivant, qui présente l'emploi de toutes les promotions de l'Ecole depuis sa création (novembre 1794), jusqu'à ce jour (10 mai 1812).

Services publics.

Artillerie { de terre, 685 / de mer, 35 }		720
Génie militaire		355
Ponts-et-Chaussées		330
Génie maritime		61
Mines		56
Géographes		45
Poudres et Salpêtres		9
Instruction publique		30
Aspirans de marine		45
Infanterie		86
		1737

CONCOURS DE 1811.

Examinateurs d'admission à l'Ecole Polytechnique.

Paris.	M. Francœur.
Tournée du Sud-Ouest.	M. Labey.
Tournée du Nord-Est.	M. Dinet.
Tournée du Sud-Est.	M. Reynaud.

Les examens ont été ouverts le 1er. août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, les 28 septembre et 6 octobre 1811, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

Quatre cent cinquante candidats ont été examinés;

SAVOIR :

A Paris.	191	450.
Dans les Départemens.	259	

Sur ce nombre, 293 ont été jugés admissibles;

SAVOIR :

de l'examen de Paris.	126	293.
des Départemens.	167	

Un Candidat a été écarté du concours pour raison d'infirmités.

Vingt-deux ont été rejetés, et dix reculés dans l'ordre d'admission, parce qu'ils ne dessinoient pas assez bien.

Vingt-un ont été rejetés de même, et huit reculés pour défaut d'instruction dans les langues française et latine.

Un candidat enfin doit essentiellement son admission à une supériorité marquée dans l'art du dessin.

Le nombre des candidats admis par le Jury a été de 165.

SAVOIR :

de Paris.	70	165.
des Départemens.	95	

Nombre des élèves admis à l'Ecole jusqu'au 1er. novembre 1810.	2473.
Total des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement.	2638.

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 165 candidats admis à l'Ecole impériale Polytechnique, suivant les décisions du jury des 28 septembre et 6 octobre 1811.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Ajasson de Grandsagne.	François.	Domérot.	Creuse.
Amphoux.	Jean-Marc-Marie.	Chambéry.	Mont-Blanc.
Anfossi.	Louis-Marie-Léon-Vinc.	Colorno.	Taro.
Arago.	Pierre-Jean-Victor.	Estagel.	Pyrén.-Orient.
Arnoux.	Jean-Cl.-Républicain.	Le Cateau.	Nord.
Artaud (Charles dit).	Adrien.	Paris.	Seine.
Auvé.	Auguste-Michel-Louis.	La Flèche.	Sarthe.
Balladier.	Jean-Annet-Claude.	Montluçon.	Allier.
Barthes.	Jean-Et.-Frédér.-Marie.	Saint-Félix.	Haute-Garonne
Bédigie.	Jean-Claude-François.	Paris.	Seine.
Belland.	Michel-Auguste.	Paris.	Seine.
Berthault.	Léonard-Philib.-Marie-Félix.	Châlons-sur-Saône.	Saône-et-Loire
Berthereau de la Giraudière.	Augustin-Hippolyte.	Neng-sur-Beuvron.	Loir-et-Cher.
Bing.	Isaac.	Metz.	Moselle.
Bizot.	Michel-Brice.	Bitche.	Moselle.
Blanchard.	Claude-Olivier.	Mortagne.	Vendée.
Boscary.	Pierre-Louis.	Vernaison.	Rhône.
Botto.	Dominique-Joseph.	Moneglia.	Apennins.
Boutault.	Paul-Emile.	Montelimart.	Drôme.
Brillard.	Aug.-Joachim-Marie.	Bure, commune de Morainvilliers.	Seine-et-Oise.
Buisson.	Pierre-Benjamin.	Paris.	Seine.
Campaignac.	Antoine-Bernard.	Montgeard.	Haute-Garonne
Castaignet.	Guill.-Ch.-Paulin.	Paris.	Seine.
Challaye.	Aristide.	Sens.	Yonne.
Charon.	Viala.	Paris.	Seine.
Chevalier.	Hervé-Arsène-Pierre.	Cherbourg.	Manche.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Cléry.	Louis-Victor.	Berlin en Prusse.	
Contencin.	Paul.	Tours.	Indre-et-Loire.
Corbin.	Edme.	Saint-Just.	Cher.
Cornisset.	Touss.-Franç.-Prosper.	Villeneuve-sur-Yonne.	Yonne.
Cramouzaud.	Léonard.	Saint-Pierre-Château.	Haute-Vienne.
Crova Vaglio.	Mart.-Oct.-Fr.-Marie.	Nizza de Montferrat.	Montenotte.
Dalesme.	Jean-Baptiste-Casimir.	Poitiers.	Vienne.
Dautheville.	François.	Chalançon.	Ardèche.
Delannay.	Nicolas-Henri.	Rouen.	Seine-Infér.
Delbet.	Jean.	Joursac.	Cantal.
De l'Espée.	Jos.-Franç.-Casimir.	Froville.	Meurthe.
Delon.	Honoré-Edouard.	Montpellier.	Hérault.
Delorme.	Jean-Marie.	Vienne.	Isère.
Demonthiers de Boisroger.	Ange-Charles.	Pontoise.	Seine-et-Oise.
Deniéport.	Etienne-Vincent.	Rouen.	Seine-Infér.
Deroys Saint-Michel.	Pierre-Henri-Joseph.	Valliguière.	Gard.
Devienne.	Alexis-Dominique.	Paris.	Seine.
Ditch.	Laurent.	Auxonne.	Côte-d'Or.
Domergue.	André-Gabriel-Pierre.	Paris.	Seine.
Donnat.	Jean-Xav.-Prosp.-Amab.	Montpellier.	Hérault.
Dosque.	Luc.	Castandet.	Landes.
Doulcet Pontécoulant.	Philippe-Gustave.	Paris.	Seine.
Ducros.	Jean-Sébastien-Victoire-Jemmapes.	Castres.	Tarn.
Duhousset.	François-Chéri.	Longeville les Saint-Avold.	Moselle.
Dumarchais (Gille dit).	François-Charles.	Tours.	Indre-et-Loire.
Dumesniladelée.	Bon-Amédée.	Coutances.	Manche.
Empaytaz.	Bénédict-Frédéric.	Paris.	Seine.
Fabre.	Albin-Camille-François.	La Fère.	Aisne.
Fauchon.	Alexandre-Prosper.	Amiens.	Somme.
Fauquier.	Jean-Pensée.	Nismes.	Gard.
Faure de Fournoux.	Télémaque.	Fournoux.	Creuze.
Fauveau.	Joseph-Germ. Chéri.	L'Orient.	Morbihan.
Feuardant, dit d'Ecullevìlle.	Anne-Hilar.-Auguste.	Equeurdreville.	Manche.
Ferrandin-Gazan.	Joseph-Guillaume.	Carcès.	Var.
Frémont.	Pierre-Alexandre.	Bruxelles.	Dyle.
Fromentin.	Armand.	Paris.	Seine.
Fuchsamberg.	Fabro.	Belfort.	Haut-Rhin.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Gambier.	Antoine-Henri-Jean.	Essomes.	Aisne.
Garnier.	Gustave-Benoit.	Bordeaux.	Gironde.
Gauchet.	Liberté-David.	Vergoncey.	Manche.
Gaudin.	Franç.-Antoine-Aimé.	La Rochelle.	Charente-Inf.
Gaullier.	Gustave.	Saumur.	Maine-et-Loire
Gernaert.	François-Joseph.	Dunkerque.	Nord.
Gilbert.	Emile-Jacques.	Paris.	Seine.
Gillet.	Gessner.	Versailles.	Seine-et-Oise.
Gimmig.	Pierre-Geoffroy-Marie.	Marseille.	Bouc.-du-Rh.
Ginet.	Pierre.	Pujols.	Lot-et-Garon.
Girard.	Aimé-Auguste.	L'Isle sur le Serein.	Yonne.
Giraud.	Marc-Sébastien-Xavier.	Le Puy.	Haute-Loire.
Girault.	Jean-Jacques.	Les Coudrais.	Loir-et-Cher.
Gloux.	Louis-Joseph-Léger.	Paris.	Seine.
Godard d'Isigny.	Alexandre-Henri.	Isigny.	Manche.
Gombault.	Emile.	Paris.	Seine.
Gougeon.	Jean-Baptiste.	Metz.	Moselle.
Goupil Préfelne.	Paul-François.	Argentan.	Orne.
Goupilleau.	Paul-Henri.	Roche-Servière.	Vendée.
Grivet.	Pierre-Auguste-Marius.	Vauréas.	Vaucluse.
Groult.	Adrien-Auguste.	Cherbourg.	Manche.
Guéry.	Augustin.	Epinal.	Vosges.
Giraudet-Saint-Amé.	Alexandre-Jos.-Eugène.	Paris.	Seine.
Hacquin.	Jean-Victor.	Paris.	Seine.
Hermann.	Chrétien-Laurent.	Cap de B.-Espér.	
Houdaille.	Aristide.	Paris.	Seine.
Labarbe.	Prudence-Franç.-Eléon.	Canville.	Seine-Infér.
Lacave Laplagne.	Jean-Pierre-Joseph.	Montesquiou.	Gers.
Ladevêse.	Auguste.	Le Mas d'Azilh.	Arriège.
Lafitte.	Pierre-Louis.	Agen.	Lot-et-Garon.
Lair.	Jean-Jacques.	St.-Jean d'Ang.	Charente-Inf.
Lallemand de Cullion.	Alexis-Louis-Philippe.	Paris.	Seine.
Lamarque.	René-Casimir.	Poitiers.	Vienne.
Lanty.	Jean-Baptiste-Albert.	Metz.	Moselle.
Largeteau.	Charles-Louis.	Mouilleron.	Vendée.
Le Bouédec.	Yves-René-Laur.-Marie.	Crozon.	Finistère.
Lecamus.	Charles-Louis-François.	Paris.	Seine.
Lecoq.	Scævola.	Cognac.	Charente.
Lefaivre.	Antoine-François.	Schelestatt.	Bas-Rhin.
Lelasseux Lafosse.	Jul.-Alexand.-Monique.	Auvers le Hamon.	Sarthe.
Lelièvre.	Martial-Bienvenu.	Domfront.	Orne.
Le Mauff.	Julien-Marie-François.	Questembert.	Morbihan.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Lindenmeyer.	Jean-Frédéric-Charles.	Grumbach.	Sarre.
Loppé.	Samuel-Etienne.	Alençon.	Orne.
Lorieux.	Bonavent.-Jean-Marie.	Le Croisic.	Loire-Infér.
Magniez.	Antoine-François.	Hendicourt.	Somme.
Mallat.	Casimir-Décadi.	Blanzac.	Charente-Inf.
Marchais.	Louis.	Angoulême.	Charente.
Mazé.	Laur.-Fr.-Louis-Marie.	Laz.	Finistère.
Meilheurat.	Barthelemy-Paul.	Gannat.	Allier.
Migout.	Jean-Charles-Baptiste.	Paris.	Seine.
Monnet.	Jean-Joseph.	Lons-le-Saulnier.	Jura.
Munier.	Charles-Christophe.	Pont-à-Mousson	Meurthe.
Mutrecy dit Maréchal.	Paul-Emile.	Paris.	Seine.
Narjot.	Etienne.	Nevers.	Nièvre.
Nisot.	Emile.	Saint-Cloud.	Seine-et-Oise.
Oblet.	Charles-Philippe-Henri.	Paris.	Seine.
Olivier.	Théodore.	Lyon.	Rhône.
Patau.	Georges-Franç.-Marc.	Vinça.	Pyrén.-Orient.
Paulin.	Charles-Antoine.	Sorèze.	Tarn.
Perrodon.	Octave-Claude-Emile.	Neyron.	Ain.
Petit-Dufrénoy.	Ours-Pierre-Armand.	Sevran.	Seine-et-Oise.
Peytier.	Jean-Pierre-Eugène-Félicien.	Genestelle.	Ardèche.
Pinac.	Etienne.	Bagnères-Adour	Hautes-Pyrén.
Pinel.	Louis-Pierre.	Saint-James.	Manche.
Poedevin.	Claude-Anastase.	Tessel.	Calvados.
Pottier.	Colza.	Honfleur.	Calvados.
Prat.	Jean-Ant.-Ferdinand.	Turin.	Pô.
Pressou.	Henri-Eugène.	Dreux.	Eure-et-Loir.
Protche.	Jean.	Metz.	Moselle.
Provigny.	Albert.	Paris.	Seine.
Puillon Boblaye.	Emile.	Napoléonville.	Morbihan.
Puissant.	Louis.	Agen.	Lot-et-Garonne
Rachia.	Paul-Romuald.	Bene.	Stura.
Rangouse.	Antoine-Hyppolite.	Agen.	Lot-et-Garonne
Reguis.	Jean-Camille.	Marseille.	Bouc.-du-Rh.
Renouard de Saint-Loup.	Charles-Pierre.	Chartres.	Eure-et-Loir.
Reynaud Villeverd.	Armand-Ch.-François.	Paris.	Seine.
Robert Dugardier.	Charles-Antoine-Julien.	Sablon.	Isère.
Rossi.	Ambroise-Vinc.-Marie.	Alexandrie.	Marengo.
Ruinet.	Marie-Théophile.	Quimper.	Finistère.
Salenave.	Eugène-Léonard.	Bayonne.	Basses-Pyrén.
Sarrieu.	Henri.	Toulouse.	Haute-Garonne

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Schneider.	Antoine-Septidi.	Paris.	Seine.
Sers.	Alexandre-Victor.	Paris.	Seine.
Serton du Plonget.	André.	Anières.	Charente-Infér.
Severac.	Joseph-Honoré-Marie.	Saint-Félix	Haute-Garonne
Sobrero.	Charles-Raphaël.	Cavalimour.	Stura.
Soubeiran.	Scipion.	Paris.	Seine.
Stocard.	Jean-Pierre-Isaac.	Essonne.	Seine-et-Oise.
Tardy.	Anselme-Louis.	Fernex-Voltaire	Léman.
Tattet.	Jacques-Ch.-Alexandre.	Paris.	Seine.
Terson.	Anacharsis-Élisée.	Revel.	Haute-Garonne
Thibaud.	Georges.	Grenoble.	Isère.
Tilli Kerveno.	Alexandre-Etienne.	Corlay.	Côtes-du-Nord.
Vandelin Daugerans.	Jean-Baptiste-Marie-Gabriel-Maxime.	Lauwin Planque	Nord.
Vergès.	Fortuné.	Arnouville.	Eure-et-Loir.
Vérité.	Alexandre-Eugène.	Paris.	Seine.
Vimal-Teyras.	Jean-François.	Saint-Amant-Roche-Savine	Puy-de-Dôme.
Vincent.	Jean-Antoine-Aza.	Marseille.	Bouc.-du-Rh.
Vouzeau.	Ch.-Franç.-Xavier.	Belfort.	Haut-Rhin.
Zéni.	Alphonse-Louis.	Paris.	Seine.

Admission dans les services publics.

Le Jury, présidé par S. Exc. M. le Gouverneur, et composé des deux examinateurs permanens, MM. Legendre et Lacroix, et des deux examinateurs temporaires, MM. Malus et Descotils, a arrêté le 30 septembre 1811 les listes suivantes par ordre de mérite, savoir :

Artillerie de terre. MM. Monneret, Morel, Desmaretz de Palis, d'Harnois, Hetzrodt, Douzon, Vieillard, Henry, Rainguel, Lacroix, Menot, Lafont du Cujula, Gunier, Marquis, Ducy, Prévost-Longpérier, Rollandy, Tascher, Patas de Mesliers, Vincens, Deviefville, Dubois, Philippé, Schneider, Daniel, Poullain, Lavallée, Sirveaux, Delagrye, Blanchard, Bonnière, Herval, Chateaurenaud, Lethierry, Rely, Goy, Bastide, Pey, Morel-Duesme, Odiot. 40

Génie militaire. MM. Vanéechout, Picerron de Mondesir, Bonnier, Frotier de la Messelière, Latour, Yver de la Bruchollerie, Molina, Parentin, Pastey, Gallice, Ketelbuter,

Gibou, Urban, David, Daigremont, Challaye, Letard de Labouralière, Radepont, Labarrière, Millon, Berthelot de la Durandière, Duport, Cotelle, Peltier, Pichot-Lamabilais, Costa, Liébaut, Lemoine (François), Claudel, Kersaint, Willmar, Lendy, Ollivier (J.-B.-V.), Castel, Dupont, Barbedette, Gueze, Lambert (Charles), Louis, Tabareau, Solier, Goblet, Prié, Desbrochers, Depigny, Maignen, Gay, Herault, Crestin-Doussières, Boistard.......................... 50

Ponts et Chaussées. MM. Mosca, Trotté-Laroche, Martin, Blondat, Griffet-Labaume (G.-C.), Drappier, Trona, Legrand, Mondot, Bardonnaut, Bourrousse-Laffore (M.-A.), Prus, Limousin, Bertault, Delarue, Chancel, Vallot, Cabrol, Lesecq, Raucourt, Besson, Bourrousse-Laffore (J.-S.), Laval, Courant, Dreppe, Messey, Dufour, Baumal, Gonet, Lemoyne (J.-J.), Bédigie, Beaudemoulin.............. 32

Ingénieurs Géographes. MM. Fessard, Levillain, Péqueult de la Varande, Dechastelus, Lefebvre (L.-H.), Loreilhe.... 6

Mines. MM. André, Parrot, Juncker, Dissandes-Monlevade, Duron.................................. 5

Construction des Vaisseaux. MM. Poumeyrol, Roget, Mimerel, Proust, Legrix, Zedé, Nosereau, Delamorinière, Chapuy, Sauvageot, Binet (P.-T.).................... 11

Poudres et Salpêtres. MM. Perruchot, Petin.......... 2

Démissionnaires. MM. Andrieu, Barthes, Clausade, Dubus, Lancelin, Leprince, Petitot de Mont-Louis........... 7

N'ont pas rejoint. MM. Lindenmeyer, Patau (1)...... 2

Réformés pour cause de mauvaise santé. MM. Delaborde, Galis, Rieffel.................................. 3

Morts. MM. Cardon, Boileau, Boylesve (2)........ 3

(1) Ces deux élèves se sont de nouveau présentés au concours, et ont été réadmis à dater du 1er. novembre 1811.

(2) Ces trois élèves sont morts chez leurs parens, où ils étoient en congé.

Etat de situation des Elèves de l'Ecole Polytechnique à l'époque du 1er. novembre 1811, et résultat des opérations des Jurys d'admission dans les services publics, de passage de la seconde à la première division, et d'admission à l'Ecole.

L'Ecole étoit composée, au 1er novembre 1810, de 337 Elèves.

SAVOIR:

1re. division.	159	337.
2e. division.	178	

Elle a perdu dans le cours de l'année,

Morts.	1re. division.	2	3	161.
	2e. division.	1		
Démissionnaires.	1re. division.	3	7	
	2e. division.	4		
N'ont pas rejoint (2e. division).			2	
Réformés pour cause de mauvaise santé (2e.div.). .			3	
Admis dans les services publics.				
Artillerie de terre.			40	
Génie militaire.			50	
Ponts-et-Chaussées.			32	
Ingénieurs-géographes.			6	
Mines.			5	
Construction des Vaisseaux.			11	
Poudres et Salpêtres.			2	

A la fin de l'année scholaire, l'Ecole restoit composée de 176 élèves.

SAVOIR:

1re. division	7	176.
2e. division.	169	

Report. 176

Le Jury a pensé que, sur les 169 élèves qui composoient la 2e. division, 157 étoient susceptibles de passer à la 1re. division, et que 12 devoient faire une seconde année dans cette division. Il en résulte que la nouvelle 1re. division s'est trouvée composée de 164 élèves.

Ajoutant aux 176 élèves qui restent à l'Ecole les 165 qui ont été admis au concours de cette année, ci. 165

L'école s'est trouvée composée au 1er. novembre 1811 de 341 élèves,

SAVOIR :

1re. division. . . . . 164 }
2e. division. . . . . 177 } 341.

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

Tome II, 4e. *cahier*, *pag.* 315 — 382; 4 *planc. in-fol.*, *Juillet* 1812.

TABLE

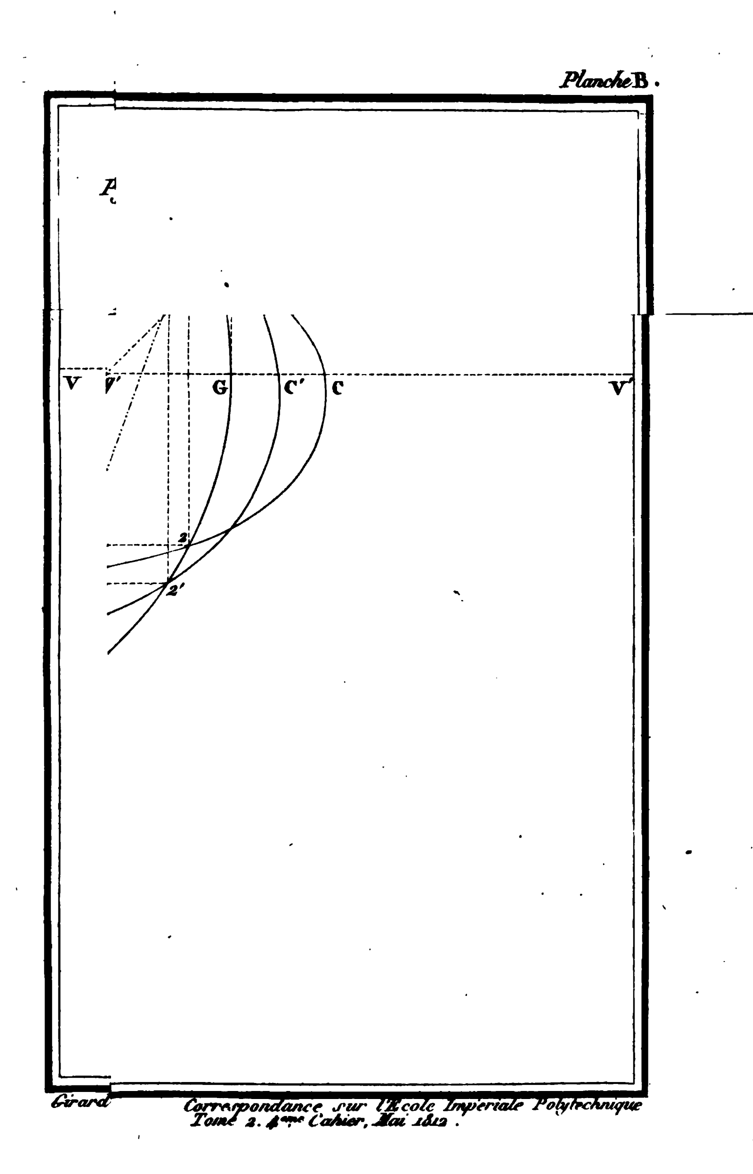
DES MATIÈRES CONTENUES DANS CE CAHIER.

---

§. I.

Par M.r Hachette.

Planche B.

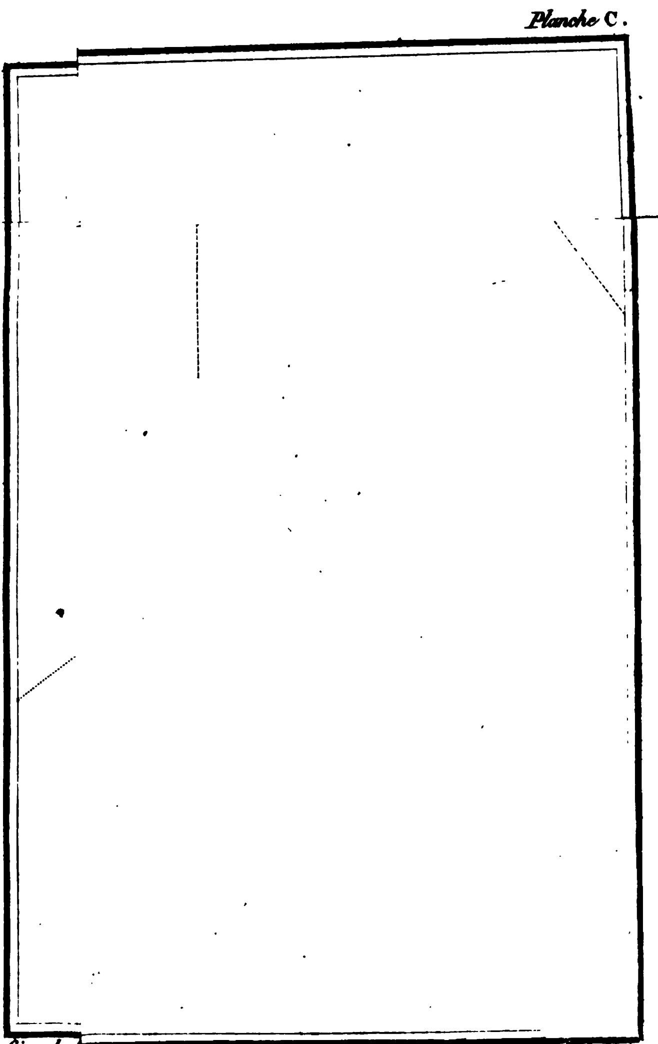


Girard

Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique
Tome 2. 4.eme Cahier, Mai 1812.

Mr. Hachette

Planche C.



Girard d.

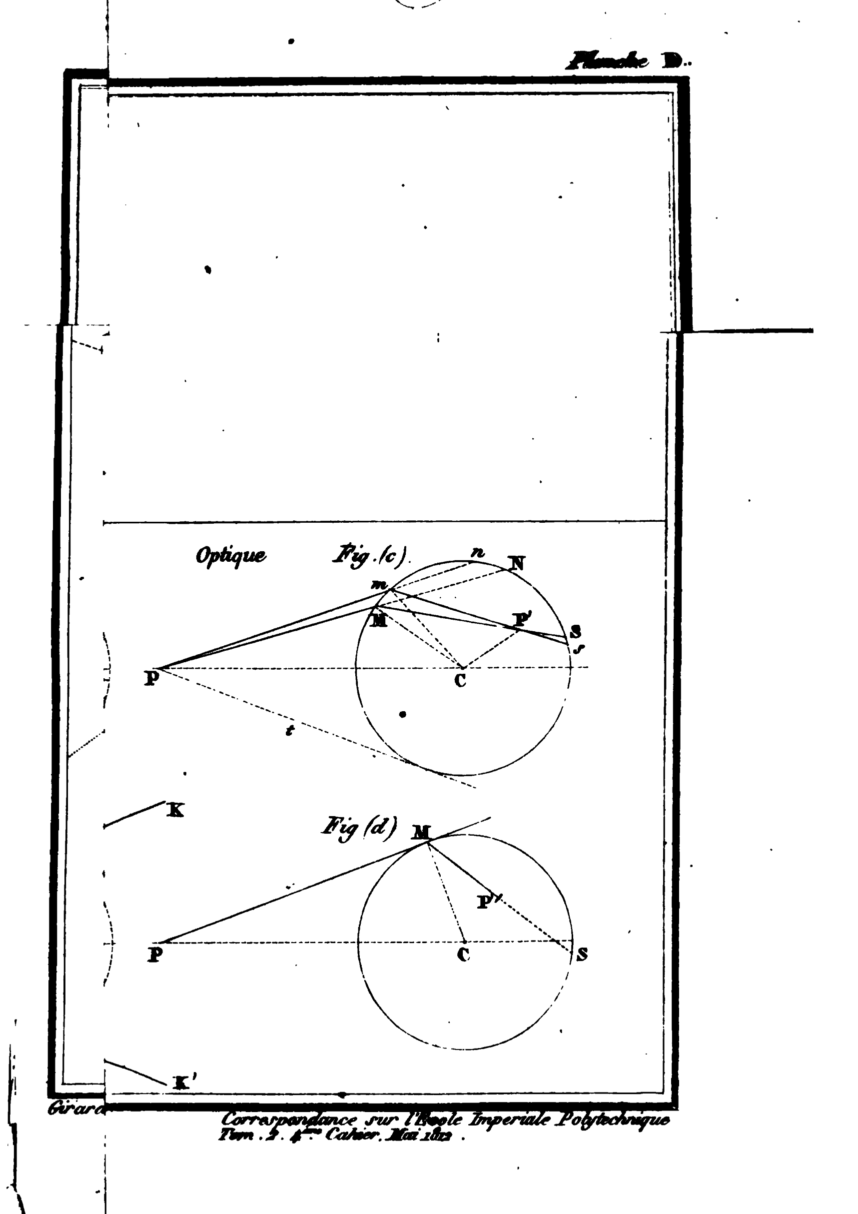
Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique
Tome 2. 4ème Cahier, Mai 1812.

Mr. Hachette

Planche C.

Girard d.

Par M.r Hachette.



CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

N°. 5. *Janvier* 1813. (2ᵉ. volume.)

Tulle, le 15 septembre 1812.

§. Iᵉʳ.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE;

Par M. Brianchon, Officier d'artillerie.

Problême.

I.

« Décrire une section conique assujettie à passer par n points » et à toucher $5 - n$ droites données. » (n ne peut avoir que l'une des six valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.)

Voici quelques-uns des cas pour lesquels ce problême peut être résolu avec la règle seule.

II.

$n = 0$. On connoît cinq droites que la courbe doit toucher, c'est-à-dire qu'on veut inscrire une section conique à un pentagone donné. Les cinquième et huitième numéros du premier volume de la *Correspondance* contiennent une méthode pour déterminer, sans compas, non-seulement une infinité d'autres tangentes, mais encore les points de contact de chacune de ces tangentes. Les points où le pentagone donné est touché par la courbe, s'obtiennent aussi par des intersections de lignes droites,

III.

Pl. 1. Fig. 1. $n = 1$. On a pour conditions quatre droites tangentes *AB*, *BC*, *CE*, *EA*, et un point *D* de la courbe placé sur l'une *CE* de ces droites. Ce qui revient à inscrire une section dans un quadrilatère *ABCE*, dont un des côtés *CE* doit toucher la courbe en un point connu *D*. (Fig. 1, pl. 1.)

Construction.

Joignez, par une droite indéfinie, le point de contact *D* avec l'un des sommets opposés du quadrilatère donne, avec *A* par exemple; puis, d'un point quelconque de *AD*, tirez aux sommets *B*, *C*, des droites prolongées suffisamment pour couper *b* et *c*, respectivement, les côtés, ou les prolongemens des côtés *CE*, *EA* : la ligne droite *bc* sera tangente à la courbe cherchée, et on en déterminera le point de contact avec la règle seulement. (Cinquième cahier du premier volume, page 151.)

Scholie.

Si *b* se confond avec le sommet *E*, *c* sera le point de contact de *EA*. Donc on peut trouver les trois autres points de contingence du quadrilatère *ABCE* sans faire usage du compas.

IV.

Fig. 2. $n = 2$. Trois tangentes *BC*, *CE*, *EB* sont données, ainsi que les points de contact *D*, *A* des deux dernières *CE*, *EB*, respectivement.

Construction.

D'un point pris à volonté sur l'indéfinie *AD*, menez des droites aux sommets *B*, *C*, du triangle connu *BCE*, et prolongez-les, s'il le faut, pour qu'elles rencontrent en *b* et *c*, respectivement, les côtés opposés *CE*, *EB*; la droite *bc* sera tangente à la section conique demandée, et on en obtiendra le point de contact, comme il a été dit précédemment (§. III, *scholie*). Le point où *BC* touche la courbe se trouve sur la droite qui joint le sommet *E* avec le point d'intersection de *CA* et *BD*.

V.

Fig. 3. $n = 3$. Déterminer une section conique qui touche deux droites *BI*, *DI*, et passe par trois points *B*, *D*, *C*, dont les deux

premiers, *B*, *D*, sont situés, respectivement, l'un sur la première, l'autre sur la seconde droite.

Construction.

Soit *I* le point de concours des deux droites connues *BI*, *DI*. Ayant tiré les indéfinies *CB*, *CD*, on tracera arbitrairement une droite qui passe par *I*, et coupe en *H* et *K*, respectivement, les côtés *CB*, *CD* de l'angle *BCD*; et l'intersection *F*, des deux droites *HD*, *KB*, appartiendra à la courbe qu'on s'est proposé de construire.

Pour avoir maintenant la tangente en *F*, par *H* et par le point de jonction des deux diagonales du quadrilatère inscrit *BCDF*, menez une droite qui coupe en *P* et *Q*, respectivement, les deux droites *BI*, *DI*; *PF* et *QC* seront tangentes à la section conique en *F* et *C* respectivement.

VI.

$n = 4$. On donne quatre points *B*, *C*, *D*, *E*, de la courbe, et, de plus, une tangente *BI* passant par l'un, *B*, de ces points. Fig. 4.

Construction.

Tracez les indéfinies *BC*, *CD*; et par le point *I*, où la tangente donnée est rencontrée par *DE*, menez à volonté une droite prolongée suffisamment pour couper en *H* et *K*, respectivement, les deux côtés *BC*, *CD*, de l'angle *BCD*. Joignez ensuite *H* et *E*, *K* et *B* par des droites dont le point de concours *F* sera un de ceux de la section conique.

Ayant ainsi cinq points *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, de la courbe, la fig. 4 montre par quelle construction simple on détermine la tangente en l'un quelconque, *B*, de ces cinq points.

VII.

$n = 5$. Circonscrire une courbe du second ordre à un pentagone donné (1er volume de la Correspondance, n°. 8, p. 310).

VIII.

Revenons sur l'hypothèse $n = 1$. Ce cas peut être résolu avec la règle, quand le point donné *D* se trouve sur l'une, *BE*, des deux diagonales du quadrilatère circonscrit *ABCE*. Fig. 5.

Construction.

Par les extrémités, *A*, *C*, de l'autre diagonale, et par *D*,

menez les droites indéfinies AD, CD, qui coupent en a et c les côtés CE, AE, respectivement. Soit R le point de rencontre de AC et ac; la droite RD touchera la courbe en D, et ainsi la question est réduite à celle du §. III.

IX.

Fig. 6. Dans l'hypothèse $n = 4$, la construction s'effectue aussi sans compas, lorsque la tangente donnée IT passe par l'un, I, des points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit $BCDE$.

Construction.

R étant le point de concours des deux autres côtés opposés, et O celui des deux diagonales du quadrilatère connu $BCDE$, tracez l'indéfinie RO qui, par son intersection avec IT, déterminera le point T où cette tangente IT doit toucher la section conique. Le problême est donc ramené à ceux des §. VI et VII.

X.

Quelques-uns de ces problêmes sont traités spécialement dans les cours d'architecture. Consultez, à cet égard, un ouvrage de *Blondel*, intitulé : *Résolution des quatre principaux Problêmes d'Architecture*; au Louvre, 1673, in-folio.

XI.

Toutes les constructions précédentes se déduisent de la propriété bien connue des hexagones inscrits aux courbes du second degré. Il paroît que cette propriété a été découverte par *Pascal*, qui se contenta de l'indiquer dans son *Essai sur les Coniques*, publié en 1640. Elle a depuis été démontrée et reproduite sous d'autres formes par plusieurs géomètres; et cette diversité dans la manière d'énoncer une même proposition a beaucoup contribué à en faire connoître toute la fécondité. Tout porte à croire que ce théorême fondamental est le même que celui de l'*hexagone mystique*, sur lequel *Pascal* avoit établi tout un traité de sections coniques, qui ne nous est pas parvenu. (*Voyez*, dans les Œuvres de cet auteur, une lettre écrite par *Leibnitz* et placée à la fin du 5e. ou dernier volume de l'édition de 1779.)

XII.

L'hexagone de Pascal conduit à cet autre théorême général : « Si on construit une suite de triangles dont les sommets soient

» respectivement sur les droites données, et dont les deux
» premiers côtés, prolongés, s'il le faut, passent respectivement
» par deux points donnés, tous les derniers côtés de ces triangles
» toucheront une même courbe du second ordre dont les points
» de contact pourront s'obtenir avec la règle seulement. »

Cette proposition est démontrée sous un autre énoncé, dans le 13e. cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, pag. 301, §. IX.

La courbe enveloppée par les troisièmes côtés de ces triangles variables se réduit à un point dans les deux cas suivans :

1°. Quand les trois droites fixes se croisent toutes en un même point (c'est le théorême du §. Ier. de la page 297 du 13e. cahier);

2°. Lorsque la droite qui joint les deux points donnés passe par le point de concours des deux droites fixes qui comprennent tous les derniers côtés des triangles mobiles. Ce cas particulier n'est autre que la cent trente-neuvième proposition de *Pappus*, qu'on retrouve dans le 1er. vol. de la *Correspondance* (8e. cahier, pag. 308), et dans le 10e. cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, pag. 13.

Analyse de plusieurs Mémoires de Géométrie; lue à la première Classe de l'Institut, le 14 *décembre* 1812, *par* Ch. DUPIN, *Capitaine en premier au Corps du Génie maritime.*

Vers la fin de 1805, au milieu d'un voyage que je dus faire pour me rendre de la Hollande en Italie où j'étais appelé, je commençai les recherches dont j'ai l'honneur de vous présenter les résultats.

Je les ai continuées pendant 1806 à Gênes, et pendant 1807 à Toulon, toujours dans les momens de loisir que me laissait mon service.

Au commencement de 1808 j'obtins de suivre l'amiral Gantheaume dans les Iles Ioniennes, et d'y rester. Toujours aux extrémités de l'Empire, je me suis vu forcé, par des circonstances uniques peut être, de me livrer à mes recherches mathématiques, je dirai presque sans secours, sans conseils, sans livres même. Il m'a fallu souvent épuiser mes forces pour retrouver des vérités déjà connues, ou les démontrer de nouveau. Enfin, sans cesse occupé par mille objets divers et commandé par les devoirs de mon état, c'est le travail d'un ingénieur que je vous présente, et non le fruit des méditations d'un savant. J'annonce ainsi que je me bornerai à des principes mathématiques qui ne seront pas d'une grande élévation, mais dont l'usage

dans les arts peut être toujours utile et quelquefois important.

Mon objet principal est de développer la théorie de la courbure des surfaces, et celle des contacts du même ordre; puis de montrer à-la-fois, par des explications nombreuses puisées dans les travaux des services publics, et l'utilité dont peut être cette même théorie, et les moyens généraux de s'en servir.

J'ai donc divisé cet ouvrage en deux parties, la théorie et les applications : chacune d'elles est composée de cinq mémoires. Les trois premiers, et les seuls dont je doive entretenir la Classe aujourd'hui, traitent de la courbure des surfaces considérée à partir d'un point unique; les deux suivans envisagent cette courbure sur toute l'étendue des surfaces.

J'ai développé séparément la même théorie, et par la géométrie pure, et par l'application de l'analyse, sans figures, sans constructions accessoires ou préliminaires. J'avois, pour suivre cette méthode, les plus grands et les plus beaux exemples, dans les traités de géométrie et de mécanique publiés depuis peu d'années par nos mathématiciens les plus illustres. Mais pour donner la même généralité aux méthodes de la géométrie rationnelle, il m'a fallu chercher souvent une route, pour ainsi dire nouvelle, et je me hâte d'en prévenir; afin qu'on me pardonne d'être resté trop au-dessous de mon sujet en la suivant.

Je vais maintenant exposer les principaux résultats auxquels je crois être parvenu.

Je démontre, d'abord, par la géométrie pure, un principe évident pour tous ceux qui n'y ont pas profondément réfléchi : c'est que toute étendue à deux dimensions, je veux dire toute surface, ne peut généralement avoir en chacun de ses points plus d'un seul plan tangent, et qu'en chaque point elle est susceptible d'avoir une tangence, sous toutes les directions possibles, avec un seul et même plan : c'est précisément celui qu'on appelle *le plan tangent.*

Passant ensuite aux contacts du second ordre, j'examine les conditions nécessaires pour qu'un tel contact ait lieu entre les surfaces, à partir d'un point qui leur est commun, et sous toutes les directions possibles.

Il existe toujours une infinité de surfaces du second degré, qui peuvent osculer ainsi une surface quelconque, en chacun de ses points (qui n'est pas un point singulier).

Or, parmi toutes ces osculatrices du second degré, il en est encore une infinité ayant pour axe la normale de la surface au point donné qui, par conséquent, est un des sommets de ces osculatrices.

Et comme au sommet d'une surface du second degré, se croisent à angle droit deux sections planes principales, l'une dont la courbure est un maximum, l'autre un minimum (relativement

à toutes les sections normales), toutes les propriétés de la courbure des surfaces, trouvées par Euler et par M. Monge, se présentent ici comme les conséquences nécessaires de cette première remarque.

Ainsi, par exemple, les deux sections principales de l'osculatrice du second degré sont celles du maximum et du minimum de courbure; elles sont tangentes aux sections analogues de la surface osculée; elles sont d'ailleurs à angle droit.

Donc en chaque point d'une surface quelconque (non singulier), pour toutes les sections normales, il y a simplement deux directions, l'une de plus grande et l'autre de moindre courbure; et ces deux directions sont constamment à angle droit. Les courbes tracées par M. Monge, tangentiellement à l'une de ces directions, et les courbes qu'il a tracées tangentiellement à la seconde direction, forment donc deux systêmes de lignes trajectoires orthogonales : ce sont les lignes de courbure.

De plus, dans le cas général, où les axes d'une surface du second degré sont inégaux, les seules normales qui puissent couper un des axes, sont dans les deux sections principales qui contiennent cet axe : Donc aussi sur les surfaces quelconques, *à partir* d'une première normale, on ne peut trouver de normales qui la rencontrent, que dans deux directions différentes, l'une suivant la plus grande, l'autre suivant la moindre courbure; et ces deux directions sont constamment orthogonales. Ces normales, qui se rencontrent consécutivement, vont former deux séries de surfaces développables, celles d'une série traversant à angle droit toutes celles de l'autre série; les normales elles-mêmes seront les intersections de ces développables, etc.

Voilà comment, par la simple substitution d'une osculatrice du second degré, aux surfaces quelconques, un facile enchaînement de conséquences nous conduit aux propriétés les plus générales de la courbure des surfaces.

Mais il ne suffit pas de connoître des théorêmes remarquables sur cette courbure, il faut, dans tous les cas, savoir la mesurer, pour en conserver les données, et la reproduire au besoin : c'est ce que nous allons bientôt faire.

Après avoir déduit ces premières vérités du rapprochement des surfaces quelconques avec les surfaces du second degré, je compare entr'elles les surfaces les plus générales, et je cherche les conditions de leurs contacts de différens ordres : voici le théorême fondamental de cette seconde partie.

Si nous prenons un point sur une surface générale, et que, du plan tangent en ce point à la surface, partent des ordonnées, ou rectilignes, ou curvilignes, qui, suivant une loi quelconque, ayent leur point d'application sur la surface;

Ces points d'application restant toujours à la même distance du plan tangent; enfin, les ordonnées n'ayant de fixe que leur origine sur ce plan, et variant d'ailleurs arbitrairement, et d'étendue, et de forme, et de direction dans l'espace :

Pourvu qu'*à partir* du point donné, aucune des ordonnées ne soit tangente à la surface primitive.

Premièrement, quelle que soit la transformation et la transposition imprimées au système des ordonnées, l'infinité des surfaces ainsi produites seront, au point donné, osculatrices de la primitive; elles auront avec elle un contact du second ordre.

Secondement, Si les nouvelles ordonnées sont à leur origine tangentes aux ordonnées primitives, c'est-à-dire, ont avec elles un contact du *premier* ordre, l'infinité des surfaces ainsi produites auront au point donné un contact du *troisième* ordre avec la surface primitive.

Troisièmement, si les nouvelles ordonnées ont à leur origine un contact du *second* ordre avec les ordonnées primitives, l'infinité des surfaces ainsi produites, auront, au point donné, un contact du *quatrième* ordre avec la surface primitive.

Et généralement, l'ordre du contact des nouvelles surfaces avec la primitive sera de *deux* unités plus grand que celui du contact des ordonnées à leur commune origine.

Et, de plus, soit que les surfaces primitive ou dérivées, soient continues ou discontinues, les propriétés que nous venons d'indiquer ne cesseront pas d'avoir lieu dans toute leur étendue.

La première conséquence générale qu'il est possible de tirer de ces principes, c'est que, si deux surfaces ont un contact d'un ordre quelconque *suivant toute une ligne* courbe, deux sections planes faites dans les deux surfaces tangentiellement à cette courbe, ont, à leur point d'attouchement sur elle, un contact d'un ordre immédiatement supérieur.

Ainsi, par exemple, circonscrivons le cylindre à la sphère, il n'aura qu'un contact du premier ordre avec elle; or le petit cercle et l'ellipse que va tracer un plan tangent au cercle de contact des deux surfaces, cette ellipse, dis-je, et ce petit cercle auront toujours au point d'attouchement un contact du second ordre.

De là résulte encore, comme une conséquence immédiate, que sur une surface quelconque, en regardant le cercle osculateur d'une section normale, comme le grand cercle osculateur d'une sphère, les rayons des petits cercles tangens au grand au point donné, sont les rayons des sections obliques de la surface, dirigées dans le plan de ces petits cercles. Ainsi les rayons des sections obliques sont, sur le plan de ces sections, la projection du rayon de courbure des sections normales : théorême déjà connu.

L'avantage de ces diverses propriétés de l'étendue est de

pouvoir, au moyen d'une surface unique, simple, facile à considérer, déterminer tout ce qui regarde la mesure de la courbure des surfaces les plus générales. Ainsi la sphère qui déjà vient de nous faire connaître la loi qui ramène la courbure des sections obliques à celle des sections normales ; la sphère peut aussi nous conduire à la détermination des rayons des sections normales d'abord des surfaces du second degré, et, par suite, des surfaces les plus générales : puisque, comme nous l'avons démontré, ces dernières peuvent être osculées par une infinité de surfaces du second degré.

Voici comment je parviens à déterminer les rayons de courbure des surfaces du second degré pour un quelconque de leurs points. = Je conçois le plan tangent en ce point, et, par le centre, le plan diamétral qui lui est parallèle ; je trace les deux axes de la section faite par ce dernier plan sur la surface ; je les transporte, parallèlement à leur position primitive, du centre au point donné : cela posé,

Le grand axe est tangent à la ligne de moindre courbure qui passe par ce point.

Le petit axe est tangent à la ligne de plus grande courbure qui passe par ce point.

Ensuite une troisième proportionnelle à la distance du centre au plan tangent et au demi-grand axe, est le rayon de moindre courbure.

Une troisième proportionuelle à la distance du centre au plan tangent et au demi petit axe, est le rayon de plus grande courbure.

Enfin, si nous transportions semblablement, sur le plan tangent, un diamètre quelconque de la section diamétrale, il seroit tangent à une certaine section normale ; or le rayon de cette section normale seroit encore une troisième proportionnelle à la distance du centre au plan tangent, et à la moitié de ce diamètre.

La simplicité de ces déterminations doit les rendre d'autant plus utiles aux applications de l'ingénieur et de l'artiste, qu'ici l'analyse conduit à des résultats, faciles sans doute, mais d'une complication de calculs véritablement effrayante.

Il faut maintenant transporter ces vérités aux surfaces les plus générales. Mais il convient pour cela de recourir à de nouveaux principes : ils constituent ce que j'appelle la *théorie des tangentes conjuguées*. Cette théorie et ses applications forment l'une des parties principales du travail que j'ai l'honneur de vous soumettre ; et je crois devoir, avant de la faire connaître, réclamer de nouveau l'attention et l'indulgence de la Classe.

Concevons qu'une surface développable touche une surface

générale à double courbure, dans toute l'étendue d'une certaine courbe. Je me place en un point de cette courbe, et je considère 1°. la tangente à cette courbe, 2°. la droite, qui, en ce point, est l'arête de la surface développable. L'une de ces droites est déterminée de position dès que l'autre l'est; et pour exprimer leur corrélation, quelle qu'elle soit d'ailleurs, je les appelle *tangentes conjuguées*. Nous venons donc de former un *système de tangentes conjuguées*.

A présent, concevons une seconde surface développable, pareillement circonscrite à la surface générale, mais telle, que la nouvelle courbe de contact soit tangente à la droite arête de la première développable; alors, aussi, la droite arête de la seconde développable sera tangente à la première courbe de contact.

Ces deux droites sont donc à-la-fois et respectivement pour les deux développables et pour les deux courbes de contact, et des arêtes et des tangentes : ce qui déjà justifie leur dénomination de tangentes conjuguées.

Appliquons un moment ces considérations :

Lorsqu'une batterie rasante est placée sur une colline, la ligne magistrale, ou la direction de la batterie, est la courbe de contact d'une surface développable circonscrite au terrain de la colline, et qui va tracer en avant la ligne de démarcation des points soumis au feu de la batterie, et de ceux, au contraire, qui s'en trouvent défilés par la seule configuration de la colline. La ligne des feux, dirigée sur cette développable, et la direction de la batterie, forment précisément un système de tangentes conjuguées sur la surface de la colline : donc cette ligne de feux étant connue, pour enfiler la batterie par d'autres feux, il faudra se diriger sur la tangente conjuguée à cette ligne. Je n'offre cet exemple que pour rendre sensible mon idée, parce qu'une telle méthode ne convient qu'aux recherches du cabinet, ou bien à des opérations exécutées à loisir sur le terrain même; mais à la guerre il faut suivre une tout autre marche. Poursuivons.

La direction donnée d'une tangente entraîne, il est vrai, la détermination de sa tangente conjuguée; mais rien ne détermine la première tangente : si donc on suppose qu'elle prenne tour-à-tour, sur le plan tangent, toutes les directions imaginables autour du point donné, à chacune d'elles correspondra une nouvelle tangente conjuguée. En suivant cette méthode, nous allons trouver, pour un seul point de la surface primitive à double courbure, une infinité de systêmes différens de tangentes conjuguées.

Il est facile d'apercevoir que ces différens systêmes dépendent essentiellement de la forme de la surface à partir du point

donné ; ils sont des élémens secondaires de la courbure : cherchons donc la chaîne qui les rattache aux élémens mêmes de cette courbure des surfaces ; et d'abord tous les systêmes de tangentes conjuguées, appartenant au même point d'une surface, doivent être liés entr'eux par une loi unique et constante ; la voici :

Quelle que soit la forme de la surface primitive, chacun de ses points peut être regardé comme le centre d'une certaine courbe du second degré, tracée sur le plan tangent, et telle, que chacun des systêmes de tangentes conjuguées correspondant à ce point, est un des systêmes de diamètres conjugués de cette courbe, que j'appelle *indicatrice ;* parce qu'elle spécifie, parce qu'elle indique complètement la forme de la courbure des surfaces, à partir du point qui lui sert de centre.

Mais parmi tous les systêmes de diamètres conjugués, il en est un où les deux diamètres se coupent à angle droit, c'est celui des axes : le système des tangentes conjuguées représenté par ces axes, sera celui des deux tangentes aux lignes de plus grande et de moindre courbure.

Je vais maintenant, en peu de mots, exposer quelques propriétés des tangentes conjuguées et de l'indicatrice.

Les rayons des sections normales de la surface sont directement proportionnels aux quarrés des diamètres de l'indicatrice tangens à ces sections. . . . . . Il suit delà, que, si l'on fait deux sections normales dirigées suivant deux tangentes conjuguées, la somme des deux rayons de courbure de ces sections sera constante et égale à la somme des rayons de courbure de la surface elle-même : c'est une équation du premier degré entre ces rayons. Dans la partie analytique de notre théorie, nous faisons un très-grand usage de cette équation, qui simplifie et les considérations et les calculs.

Mais le plus grand avantage de l'indicatrice n'est pas de conduire à quelques propriétés plus ou moins remarquables, de la courbure des surfaces ; c'est d'offrir pour tous les cas un moyen vraiment élémentaire de discuter et de déterminer cette courbure.

Suivant que l'indicatrice est une ellipse ou une hyperbole, les deux courbures de la surface sont dirigées dans le même sens ou en sens opposés ; et suivans ces deux cas, tous les rayons des sections normales sont dirigés dans le même sens, ou bien, une première série de rayons l'est dans un sens, et tous les rayons des sections conjuguées dans un sens opposé : par conséquent les deux rayons de chaque système de sections normales conjuguées, seront simultanément, dans tous les systêmes, de même signe ou de signe différent, et dès-lors, ou leur somme ou leur différence constante et égale à la somme ou à la différence des

deux rayons de courbure de la surface, suivant que ces rayons principaux sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire.

Dans le premier cas, où, comme nous venons de le dire, l'indicatrice est une ellipse, si cette ellipse devient un cercle, le point qui correspond alors à l'indicatrice est un point singulier dont la considération est importante. Lorsque ces points, dont l'indicatrice est circulaire, sont isolés sur la surface, ils en sont ce qu'on appelle des *ombilics*; lorsqu'ils forment une courbe continue, c'est la ligne des courbures égales. Nous avons cherché à développer la théorie de ces points singuliers, par une analyse qui nous a conduit à des résultats que nous croyons nouveaux.

Passons maintenant au cas où l'indicatrice est une hyperbole; les asymptotes de cette indicatrice sont deux droites infiniment remarquables : chacune d'elles représente à elle seule un système de deux tangentes conjuguées; chacune d'elles représente, en outre, toute une surface développable circonscrite à la surface donnée, et qui devroit la toucher tangentiellement à cette asymptote; enfin ces deux asymptotes ont pour caractère d'avoir, avec la surface donnée, non pas un simple attouchement comme les autres tangentes, mais un contact du second ordre.

Les lignes asymptotiques, je veux dire les courbes par-tout tangentes à l'un des asymptotes de quelqu'indicatrice, ont avec les lignes de courbure des relations bien singulières : d'abord une des lignes de courbure divise en deux parties égales un des angles formés par les lignes asymptotiques; l'autre ligne de courbure divise en deux parties égales l'angle supplémentaire de celui-là.

Par conséquent la connaissance des lignes asymptotiques conduit immédiatement, pour chaque point, à la connoissance de la direction des lignes de courbure.

Observons bien, d'ailleurs, que les lignes des deux courbures se coupent constamment à angle droit : l'angle qu'elles forment n'indique aucune relation entre les deux courbures de la surface; mais il n'en est pas ainsi de la direction des lignes asymptotiques; car elle fait toujours connaître immédiatement le rapport des deux rayons de courbure de la surface.

Il est égal au cube de la tangente du demi angle formé par les lignes asymptotiques. Ce résultat peut être souvent utile dans la géométrie descriptive et ses applications aux arts.

Les surfaces du second degré, qui ont leurs courbures dirigées en sens opposés, vont nous rendre sensibles ces généralités. Les surfaces de cette classe peuvent, comme on sait, être décrites de deux manières différentes par une ligne droite. Eh bien, ces deux droites génératrices qui passent ainsi par chaque point, sont les lignes asymptotiques mêmes, qui correspondent à ce point : ainsi les lignes de courbure des hyperboloïdes du second degré

coupent, partout, en deux parties égales, les angles formés par les droites des deux générations de ces hyperboloïdes. Mais il y a bien d'autres conséquences qu'on peut déduire de la considération des lignes asymptotiques, relativement à la courbure des surfaces gauches : je me contenterai d'en indiquer une seule qui prendra quelqu'intérêt, parce qu'elle rappellera les recherches et le nom d'un illustre géomètre.

M. Delagrange a fait connaître que les surfaces dont les deux courbures sont partout égales et dirigées en sens contraires, est toujours telle, que son aire entre une ou plusieurs courbes limites données, est un minimun. J'ajouterai maintenant que ces surfaces ont pour autre caractère geométrique, 1°. que les lignes asymptotiques forment constamment sur elles un système de trajectoires orthogonales ; 2°. que partout leurs lignes de courbure font un angle de 50°. centigrades avec les lignes asymptotiqués: je me contenterai d'observer que la surface gauche de la vis rectangulaire, ou celle de l'escalier à rampe circulaire, jouissent de ces diverses propriétés ; ce qui présente un moyen facile de tracer leurs lignes de courbure, qui, dans ce cas, offrent à l'architecture une décorarion aussi simple qu'élégante.

Jusqu'ici nous avons supposé que l'indicatrice dût être une ellipse ou une hyperbole ; elle pourrait être une parabole. Alors la surface n'auroit au point donné ses deux courbures ni dans le même sens, ni en sens opposés; elle serait développable. Chaque arête rectiligne représenteroit à elle seule, pour chacun de ses points, toute une série complète de tangentes; et toute autre tangente de la surface, tracée à partir du même point, serait nécessairement conjuguée à cette droite : enfin l'on parviendrait, par ces considérations, à toutes les propriétés des surfaces développables.

En suivant cette route, j'ai ramené la discussion générale de la courbure des surfaces, au simple examen des formes diverses qu'affectent les lignes courbes du second degré ; et ces lignes sont si simples, si faciles à considérer, que, par leur moyen, la théorie de la courbure des surfaces semble devoir cesser d'appartenir à la géométrie transcendante, et rentrer dans la partie élémentaire de l'application de l'algèbre à la géométrie.

Après être parvenu aux divers résultats que je viens d'indiquer, par des considérations purement géométriques, il a fallu les exposer par l'analyse : c'est l'objet du deuxième et du troisième mémoires.

Par des développemens tirés du théorême de Taylor, dans les fonctions à trois variables, je démontre les propriétés générales sur les contacts des surfaces dont les ordonnées éprouvent certaines variations déterminées, comme nous l'avons indiqué. Ensuite les

équations des tangentes conjuguées, et les conditions d'obliquité ou d'orthogonalité de ces tangentes, m'ont donné d'abord leurs propriétés communes, en second lieu celles particulières aux lignes de courbures; et par quelques artifices d'analyse, je suis retombé sur les équations données par M. Monge; je l'ai fait, afin qu'on vît l'identité de ses conséquences avec les miennes, et que celles-ci, de la sorte, acquissent une confiance si méritée par les belles recherches de ce géomètre, dont je m'honorerai toujours d'avoir été et d'être encore l'élève.

Je ne puis entrer dans le détail des opérations analytiques nécessaires pour arriver aux principes que nous avons exposés jusqu'ici. Nous avons cherché, autant que nous avons pu, à suivre, quoique de loin, la marche que les mathématiciens modernes nous ont tracée, et qui donne à leurs productions un caractère de facilité et d'élégance qui fera vivre leurs méthodes autant que les grandes vérités qu'elles nous ont fait connaître.

Je me contenterai de dire qu'après avoir déterminé les caractères analytiques propres à chaque genre de courbure des surfaces, à partir d'un point donné, je suis parvenu aux équations mêmes des familles des surfaces qui, dans chacun de leurs points, présentent une courbure douée d'un seul et même caractère.

Tels sont les objets traités dans les trois premiers mémoires de l'ouvrage que j'ai l'honneur de soumettre à l'examen de la Classe. Si cet examen ne lui laisse point à penser que la suite de mes recherches ne mérite pas de lui être présentée, enhardi par cette indulgence, je produirai la suite des résultats auxquels je crois être parvenu, et les applications que j'ai tenté d'en faire aux méthodes de la Géométrie descriptive, à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, et à l'optique.

Ces applications, si je ne me trompe, feront entrevoir que les généralités qui les précèdent, ne sont pas seulement des spéculations oiseuses; mais qu'elles pourroient devenir d'un intérêt immédiat, si, saisies par des mains plus exercées, leurs conséquences étoient portées dans les objets d'une utilité générale.

Conformément aux conclusions du rapport de MM. Carnot, Monge, et de M. Poisson rapporteur, ces mémoires ont été jugés dignes de l'approbation de la première Classe de l'Institut. Nous proposerions, disent les commissaires de la classe dans leur rapport, d'insérer ces mémoires dans le Recueil des Savans étrangers, si l'auteur ne les avoit destinés à un autre usage.

Ils composent la première section d'un ouvrage ayant pour titre : *Développemens de Géométrie*, *etc.*, qui s'imprime actuellement. Il paroîtra en mai 1813, 1 vol. in-4°.

GNOMONIQUE ANALYTIQUE,

Par M. Puissant.

Définitions.

Si on conçoit une tige de fer droite, dirigée parallèlement à l'axe du monde, et scellée dans un mur, du côté où l'une de ses faces planes est éclairée par le soleil, l'ombre de la tige entière représentera sur ce mur la trace d'un méridien céleste passant par le centre du soleil; et l'ombre de l'extrémité antérieure de la tige parcourra, dans le même jour, une courbe qui sera la trace d'un cône droit, dont la génératrice fait avec la tige un angle égal au complément de la déclinaison de l'astre. L'objet de la gnomonique est d'indiquer l'heure et le jour de ces deux phénomènes.

Vu l'énorme distance à laquelle le soleil se trouve de nous, il est permis de supposer que la tige ou l'*axe* du cadran solaire se confond avec celui de rotation de la terre; et à cause de la lenteur du mouvement de l'astre dans l'écliptique, il est permis en outre de supposer sa déclinaison constante pendant sa présence sur l'horizon.

Le *centre du cadran* est le point où son axe, réduit par la pensée à une ligne mathématique, le rencontre. Ce point peut être pris en même temps pour le centre de la terre.

La trace du méridien du lieu sur le cadran se nomme *la méridienne*, parce que c'est sur cette ligne que tombe précisément l'ombre de l'axe à midi vrai.

La projection de l'axe ou du *style* sur le cadran s'appelle *la soustylaire;* cette ligne est donc la trace même d'un méridien perpendiculaire au plan du cadran. En général, la trace d'un méridien se nomme une *ligne horaire*.

On dit qu'un cadran vertical décline, lorsqu'il n'est point perpendiculaire au méridien du lieu.

Quoique toutes les questions de gnomonique se résolvent facilement et avec élégance par les procédés de la géométrie des-

criptive, il est cependant nécessaire de faire usage du calcul, lorsqu'on veut tracer les lignes d'un cadran solaire avec toute la précision possible. J'ai seulement pour but, dans ce petit mémoire, de résoudre par l'analyse ce problême général :

Déterminer les lignes horaires et les courbes de déclinaison sur un cadran vertical déclinant, connaissant la longueur de l'axe, la méridienne et la déclinaison du cadran, ainsi que la latitude du lieu (1).

Détermination des lignes horaires.

Rapportons les points de l'espace à des coordonnées rectangles, et prenons à cet effet, pour axe des x, l'intersection du méridien du lieu avec l'horizon, pour axe des y la trace du premier vertical sur ce dernier plan, et par conséquent pour axe des z la verticale du lieu du cadran.

L'origine des coordonnées pouvant être considérée comme le centre de la terre ou de la sphère céleste, la droite qui joint ce point et le pôle du monde sera toute entière dans le plan des xz, et fera, avec l'axe des x, un angle λ égal à la latitude du lieu ou à la hauteur du pôle; de sorte que dans l'équation

$$z = Ax + By,$$

qui est celle du plan d'un méridien quelconque, on aura

$$A = \text{tang.}\,\lambda.$$

Quant au coefficient B, il dépend visiblement de l'angle que ce méridien fait avec le plan des xz, c'est-à-dire de l'angle horaire p réduit en degrés, à raison de 1 heure pour 15°. Or, on sait que

$$\cos p = \frac{-B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \qquad \text{donc} \qquad \cos^2 p = \frac{B^2}{\sec^2 \lambda + B^2},$$

et par conséquent $$B = \frac{\cot p}{\cos \lambda}.$$

(1) Voyez, pour la détermination de ces élémens, les traités de Gnomonique, et le *Journal de l'École Polytechnique*, tom. IV, pag. 261.

Il suit de là que l'équation du plan d'un cercle horaire est

$$z = x \text{ tang } \lambda + y \frac{\cot p}{\cos \lambda}; \qquad (1)$$

En faisant successivement x et z nulles, on aura les traces verticales et horizontales de ces cercles; et si on prend positivement l'angle horaire p après midi, les lignes horaires seront toutes dirigées vers l'est : le contraire aura lieu en considérant p comme négatif; et pour lors, dans l'un comme dans l'autre cas, les x positives se compteront du sud au nord, les y positives de l'ouest à l'est, et les z positives de haut en bas.

Maintenant soit pris pour cadran le plan même des yz, c'est-à-dire, le plan vertical non déclinant : on aura pour l'équation des lignes horaires

$$z = y \frac{\cot p}{\cos \lambda}; \qquad (2)$$

et si H désigne l'angle qu'une de ces lignes fait avec l'axe des z ou la méridienne, on aura par conséquent

$$\text{tang } H = \frac{y}{z} = \cos \lambda \text{ tang } p,$$

ou, désignant par i l'inclinaison de l'axe ou du style sur le cadran, on aura, à cause de $i = 90^\circ - \lambda$,

$$\text{tang } H = \sin i \text{ tang } p; \qquad (3)$$

équation qui a lieu pour le cadran horizontal comme pour le cadran vertical régulier; mais dans le cas du premier cadran, on a nécessairement $i = \lambda$.

Pour résoudre le problême que nous avons principalement en vue, soit θ la déclinaison du cadran, comptée de l'ouest au nord, à partir de l'axe des y; et afin de prendre les coordonnées des points des lignes horaires dans le plan même du cadran, ce qui est beaucoup plus commode pour les constructions, employons les formules connues pour passer d'un système de coordonnées rectangles à un autre système de même nature, savoir,

$$x = y' \sin \theta + x' \cos \theta,$$
$$y = y' \cos \theta - x' \sin \theta,$$
$$z = z';$$

alors l'équation (1), rapportée aux nouvelles coordonnées, deviendra

$$\left. \begin{array}{r} z' \cos\lambda = x' \sin\lambda \cos\theta + y' \sin\lambda \sin\theta \\ - x' \cot p \sin\theta + y' \cot p \cos\theta \end{array} \right\} \quad (4)$$

De là l'équation des lignes horaires, sur le plan vertical déclinant $y'\,z'$, est

$$z' \cos\lambda = y' (\sin\lambda \sin\theta + \cot p \cos\theta)\,; \quad (5)$$

ainsi appelant toujours H l'angle d'une de ces lignes avec la méridienne, on a

$$\cot H = \operatorname{tang}\lambda \sin\theta + \frac{\cot p \cos\theta}{\cos\lambda}\,; \qquad (6)$$

Cette formule, qui est une de celles de la trigonométrie sphérique, se calcule plus commodément par les logarithmes, en décomposant le second membre en facteurs; mais pour rendre cette décomposition possible, soit un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$\cot H = K \cos(\theta - \varphi),$$

K étant de plus un coefficient inconnu dont on déterminera la valeur ainsi qu'il suit :

D'abord on a, en développant,

$$\cot H = K \sin\varphi \sin\theta + K \cos\varphi \cos\theta,$$

ensuite, si on égale terme à terme cette valeur de $\cot H$ avec la précédente, on aura

$$K \sin\varphi = \operatorname{tang}\lambda, \qquad K \cos\varphi = \frac{\cot p}{\cos\lambda},$$

partant

$$K = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin\varphi}\,; \qquad \operatorname{tang}\varphi = \sin\lambda \operatorname{tang} p \quad (7)$$

et enfin

$$\cot H = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin\varphi} \cos(\theta - \varphi) \qquad (8)$$

La valeur de $\operatorname{tang}\varphi$, qui est analogue à celle (3), fait voir, comme les considérations géométriques, que le cadran irrégulier et le cadran horizontal peuvent se déduire réciproquement l'un de l'autre.

Il est utile de connoître l'angle que la soustylaire fait avec la méridienne du plan du cadran, ainsi qu'on le verra bientôt,

Pour trouver cet angle, soit V celui qu'un cercle horaire fait en général avec le cadran ; on aura

$$\cos V = \frac{-M}{\sqrt{1+M^2+N^2}},$$

en représentant généralement par $z' = Mx' + Ny'$, l'équation (4) du plan de ce cercle, et auquel cas

$$M = \text{tang}\,\lambda \cos\theta - \frac{\cot p \sin\theta}{\cos\lambda},$$

$$N = \text{tang}\,\lambda \sin\theta + \frac{\cot p \cos\theta}{\cos\lambda}.$$

Mais pour particulariser le cercle que nous considérons, soit $V = 90^\circ$, ou $\cos V = 0$; alors on aura $-M = 0$, d'où l'on tire, en désignant par p' la valeur actuelle de p,

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\sin\lambda}{\cot p'}. \qquad (9)$$

Telle est la relation qui doit exister entre les angles θ, λ et p', pour que le cercle horaire faisant un angle p' avec le méridien du lieu, soit perpendiculaire au cadran. Mais, par ce qui précède, la tangente de l'angle d'une ligne horaire avec la méridienne du cadran, est, en général,

$$\text{tang}\,H = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda \sin\theta + \cot p \cos\theta},$$

donc celle de l'angle H' de la soustylaire avec cette même méridienne sera, à cause de la relation précédente,

$$\text{tang}\,H' = \cot\lambda \sin\theta. \qquad (10)$$

Cet angle H' est nécessairement nul en même-temps que θ ; ainsi, lorsque le cadran est vertical non déclinant, la soustylaire et la méridienne se confondent ; ce qui est d'ailleurs de toute évidence.

Supposons maintenant qu'un certain nombre de méridiens soient placés symétriquement de part et d'autre du plan déterminé par l'axe du cadran et sa projection ou la soustylaire : dans ce cas, leurs traces sur le cadran seront de même disposées symétriquement à droite et à gauche de cette soustylaire ; si donc l'on prenoit pour axe des coordonnées, cette ligne et une droite qui lui fût perpendiculaire, et qui se trouvât toujours sur le cadran, les traces ou lignes horaires dont il est question, se

détermineroient par la même formule relative au cadran vertical non déclinant ; seulement il faudroit substituer pour λ le complément de l'angle i que l'axe fait avec la soustylaire, et pour p l'inclinaison ϖ d'un cercle horaire sur le plan de l'axe et de la soustylaire, ce qui est assez évident. Or, l'heure à laquelle le centre du soleil se trouve dans ce plan est, par ce qui précède, donné par la formule $\cot p' = \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tang} \theta}$, puisque p' est l'angle horaire compté à partir du méridien du lieu.

Désignant donc par P un autre angle horaire supposé plus grand que p', on aura $\varpi = P - p'$; et l'équation (3) en y changeant H en h, afin d'indiquer que l'angle h se compte maintenant de la soustylaire, deviendra alors,

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} h = \sin i \operatorname{tang} \varpi = \sin i \operatorname{tang} (P - p') \\ \text{ou} \\ \operatorname{tang} (H - H') = \sin i \operatorname{tang} (P - p'). \end{array}\right\} \quad (11)$$

Ce dernier procédé, qui pourra être employé pour déterminer les directions des lignes horaires sur le cadran vertical déclinant, sera plus simple que celui qui dérive de l'emploi de la valeur ci-dessus de $\cot H$.

Si on vouloit avoir l'angle i en fonction de la déclinaison θ du cadran et de la hauteur λ du pôle, cela seroit très-facile : en effet, on remarquera que l'équation du plan $y'x'$ du cadran, par rapport aux coordonnées primitives, est

$$x = y \operatorname{tang} \theta$$

et que les équations de l'axe sont

$$x = z \cot \lambda, \qquad y = 0;$$

puis, si on se rappelle que quand

$$x = az, \qquad y = bz$$

sont les équations d'une droite, et que

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est celle d'un plan, le sinus de l'angle i de cette droite avec ce plan est

$$\sin i = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

On en conclura pour le cas actuel, et à cause de

$$b=0,\ a=\cot\lambda,\ A=1\ ,\ B=-\text{tang}\,\theta,\ C=0,$$

que

$$\sin i=\frac{\cot\lambda}{\sqrt{1+\cot^2\lambda}\sqrt{1+\text{tang}^2\theta}}=\frac{\cos\lambda}{\sec\theta}=\cos\lambda\cos\theta;\quad (12)$$

résultat qui se déduit d'ailleurs immédiatement de la trigonométrie sphérique, ainsi que tous ceux qui précèdent. On trouveroit de la même manière l'inclinaison ξ de l'axe sur une ligne horaire, supposant que l'on connût les angles i et h; et il n'est pas difficile de voir que l'on auroit

$$\cos\xi=\cos i\cos h=\cos i\cos(H-H')\qquad (13)$$

Détermination des Courbes diurnes.

L'équation d'une courbe diurne, c'est-à-dire, de celle que trace sur le cadran l'ombre de l'extrémité de l'axe, ou un faisceau de lumière passant par une petite ouverture circulaire pratiquée au milieu d'une plaque qui tient souvent lieu d'axe, se détermine comme il suit :

Soit r la longueur de l'axe, prise en même temps pour celle du rayon d'une sphère concentrique à la sphère céleste; et supposons pour un moment que le centre de cette petite sphère soit l'extrémité antérieure de cet axe. Supposons, de plus, que la déclinaison δ du soleil soit boréale, ou, ce qui est de même, que la latitude du parallèle décrit par cet astre en vingt-quatre heures, soit $+\delta$. Comme le plan de ce parallèle est perpendiculaire à celui des xz, son équation sera généralement

$$z=A'x+D',$$

et à cause que A' est, dans ce cas, la tangente de l'angle qu'il fait avec le plan des xy, on a

$$A'=-\cot\lambda;$$

D'ailleurs, la plus courte distance de l'origine des coordonnées au plan de ce même parallèle, étant égale d'une part à $r\sin\delta$, et d'autre part à $\frac{D'}{\sqrt{1+A'^2}}$, il s'ensuit que l'on a

$$r\sin\delta=\frac{D'}{\text{cosec}\,\lambda}\qquad\text{et}\qquad D'=\frac{r\sin.\delta}{\sin\lambda},$$

et par conséquent

$$z = -x \cot \lambda + \frac{r \sin \delta}{\sin \lambda}. \qquad (14)$$

Actuellement, il s'agit de trouver l'équation de la surface conique engendrée par le rayon lumineux qui décrit la courbe de déclinaison sur le plan. Or, les projections verticales de ce rayon sont en général

$$x = mz, \; y = nz$$

l'équation de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

et celle du plan d'un parallèle à l'équateur,

$$z = A'x + D';$$

par conséquent, si on suppose que ces quatre équations aient lieu en même temps, on trouvera, en les combinant entr'elles, que l'équation de la surface conique cherchée est

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 (z - A'x)^2}{D'^2},$$

et si on fait x constante et égale à α, l'équation résultante

$$\alpha^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 (z - A'\alpha)^2}{D'^2}$$

sera celle de la trace du cône sur un plan vertical parallèle à l'axe des y, et par conséquent non déclinant. Substituant pour A' et D' leurs valeurs précédentes, et faisant attention que $\alpha = r \cos \lambda$, on aura, après les opérations nécessaires, et avoir fait z négative, afin de se conformer à l'hypothèse faite sur la déclinaison δ du soleil,

$$z^2(\sin^2\delta - \sin^2\lambda) + 2rz\cos^2\lambda\sin\lambda + y^2\sin^2\delta = r^2\cos^2\lambda(\cos^2\lambda - \sin^2\delta).$$

Cette équation devient plus simple, quand on place l'origine des z à la racine même de l'axe du cadran, comme on l'a fait précédemment, et alors on a $z = z' - r \sin \lambda$; par suite

$$z'^2(\cos^2 i - \sin^2\delta) - 2rz'\cos i\cos^2\delta - y^2\sin^2\delta + r^2\cos^2\delta = 0, \qquad (15)$$

à cause de $i = 90^\circ - \lambda$.

Il suit de là que la courbe diurne ou de déclinaison est une hyperbole ou une ellipse, selon que le complément de l'incli-

naison de l'axe sur le cadran est plus grand ou plus petit que la déclinaison du soleil ; elle est, au contraire, une parabole, si $\cos i = \sin \delta$.

Lorsque $\delta = 0$, l'équation précédente se réduit à

$$z' = \frac{r}{\cos i}, \qquad (16)$$

ce qui signifie que l'*équinoxiale* du cadran est une droite perpendiculaire à la soustylaire; et en effet, le plan de l'équateur dans lequel se trouve alors le soleil, étant perpendiculaire à l'axe du monde, la trace de ce plan sur le cadran doit être aussi perpendiculaire à la projection de l'axe.

Il est remarquable que l'équation ci-dessus de la courbe diurne, et même celles (11) et (13), conviennent parfaitement à un cadran situé d'une manière quelconque, à l'égard des plans coordonnés primitifs ; pourvu que, sans changer l'origine des coordonnées, l'on prenne pour axe des z' la soustylaire, et pour axe des y' une perpendiculaire à cette ligne, située dans le plan du cadran. Dionis-du-Séjour, en résolvant les mêmes questions à la fin du premier volume de son *Traité analytique du Mouvement apparent des Corps célestes*, mais par une analyse toute différente de celle qui précède, n'a pas manqué de choisir ce système de coordonnées, parce que les formules pour calculer les parties d'un cadran solaire sont, par ce moyen, aussi simples qu'il est possible de le désirer.

Pour compléter la théorie actuelle, j'observerai que l'on détermine très-facilement les points où les courbes de déclinaison coupent les lignes horaires, en calculant les distances de ces points au centre du cadran, à l'aide des angles δ, ξ, et de la longueur r de l'axe ; car soit r' une de ces distances, on aura, par la propriété du triangle rectiligne,

$$r' = \frac{r \cos \delta}{\cos(\delta + \xi)}, \qquad (17)$$

dans la supposition que la déclinaison du soleil est boréale : on écriroit au dénominateur, $\cos(\xi - \delta)$ au lieu de $\cos(\xi + \delta)$, si la déclinaison étoit australe.

Les points de la *méridienne du temps moyen* se déterminent par la même méthode; on cherche la ligne horaire correspondante à *midi moyen* pour un jour proposé, puis l'on obtient par la formule (17) la valeur de r', en faisant usage de la déclinaison du soleil pour ce jour-là.

Exemple numérique.

Le cadran solaire exécuté au Dépôt général de la guerre, dont la latitude $\lambda = 48°51'37''$, décline vers l'ouest d'une quantité angulaire $\theta = 29°23' \frac{4}{10}$, et la longueur de l'axe $r = 1^m,4915$; trouver la ligne horaire de 1 heure, et le point où la courbe de déclinaison du soleil coupe cette ligne, lorsque cette déclinaison est boréale et égale à $\delta = 14°\,29'\,20''$.

D'abord l'angle horaire.............. P ou $p = 15°$.

Ensuite de l'équation (9) on déduit $p' = 36°.47'50''$.

Avec celle (10) on obtient......... $H' = 23°.12'25''$.

L'équation (12) donne.............. $i = 34°.58'30''$.

Celle (11)................................ $H - H' = -12°.54'40''$.

Ainsi l'angle de la ligne horaire de 1 heure avec la méridienne du cadran, est.............................. $H = 10°.17'45''$.

L'équation (13) donne............... $\xi = 36°.59'40''$.

Enfin celle (17)........................ $r' = 2^m,3189$.

Les quantités p', H', i étant constantes pour le même cadran, il ne s'agira par conséquent que de recourir aux formules (11), (13) et (17), pour déterminer tout autre point d'intersection.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

Par M. Puissant.

Problème.

Soient quatre droites a, b, c, ϱ, partant d'un même point S de l'espace, et supposons que les trois premières, a, b, c, forment un angle trièdre; on demande la relation qui existe entre les angles que la quatrième droite ϱ fait avec chacune des trois autres.

Solution.

Si, par un point quelconque de la droite ϱ, autre que S, on mène un plan perpendiculaire à cette droite, ce plan coupera les trois autres droites a, b, c, en des points A, B, C, qui pourront être considérés comme les sommets des angles de la base

d'une pyramide triangulaire *SABC*; et, en vertu d'une propriété connue des polyèdres, le carré de la face *ABC* sera égal à la somme des carrés des trois autres faces, moins deux fois la somme des produits de ces autres faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent. (Voyez la *Géométrie de position*, ou mon *Recueil de propositions de géométrie*, pag. 225, 2e. édition) (*).

(*) *Théorème.* Soient M, N, P, Q, les aires des quatre triangles, faces d'une pyramide triangulaire; m, n, p, les angles des faces de cette pyramide dans l'ordre suivant : m angle des faces N et P; n angle des deux faces M et P; p angle des deux faces M et N; soient enfin α, β, γ, les angles du plan de la face Q avec les plans des trois autres faces M, N, P, on aura l'équation suivante :

$$(A)\quad Q^2=M^2+N^2+P^2-2NP\cos m-2PM\cos n-2MN\cos p.$$

Démonstration.

Une aire quelconque plane et sa projection sur un plan, sont dans le rapport du rayon au cosinus de l'angle formé par le plan de l'aire et par le plan sur lequel on la projette. D'où il suit qu'en projetant trois quelconques des quatre faces M, N, P, Q, sur le plan de l'une d'elles, par exemple sur le plan de la face M, les trois projections seront $N\cos p$, $P\cos n$, $Q\cos\alpha$. Or, la face M, est égale à la somme de ces trois projections; donc on a l'équation

$$(1)\quad M=N\cos p+P\cos n+Q\cos\alpha.$$

Projetant successivement la pyramide entière sur ses trois faces N, P, Q, on conclura :

$$(2)\quad N=M\cos p+P\cos m+Q\cos\beta.$$
$$(3)\quad P=M\cos n+N\cos m+Q\cos\gamma.$$
$$(4)\quad Q=M\cos\alpha+N\cos\beta+P\cos\gamma.$$

Substituant dans l'équation (4) pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, leurs valeurs tirées des équations (1), (2), (3), on aura, en ajoutant les termes semblables, l'équation (*A*).

Cette démonstration s'applique à un polyèdre quelconque dont on connoît les faces, et les angles de l'une quelconque de ces faces avec toutes les autres, ainsi que M. Carnot l'a fait voir dans sa *Géométrie de position*, pag. 310. H. C.

Cela posé, désignons par (ϱ, a) l'angle que la droite ϱ fait avec l'arête a de la pyramide; par (ϱ, ab) celui de cette même droite avec le plan des arêtes ab ; par (ab, ac) l'angle dièdre des deux faces qui ont a pour arête commune, et ainsi de suite; enfin, appelons σ l'aire de la base ABC, et faisons attention que l'aire de tout triangle rectiligne est égale à la moitié du produit de deux de ses côtés, multiplié par le sinus de l'angle compris, nous aurons, conformément à la propriété citée,

$$\sigma^2 = \frac{a^2b^2}{4}\sin^2(a,b) + \frac{a^2c^2}{4}\sin^2(a,c) + \frac{b^2c^2}{4}\sin^2(b,c)$$
$$-2\frac{ab.ac}{4}\sin(a,b)\sin(a,c)\cos(ab,ac)$$
$$-2\frac{ab.bc}{4}\sin(a,b)\sin(b,c)\cos(ab,bc)$$
$$-2\frac{ac.bc}{4}\sin(a,c)\sin(b,c)\cos(ac,bc).$$

Soit V le volume de la pyramide $SABC$, dont ϱ est la hauteur; on a évidemment

$$\frac{3V}{\varrho} = \sigma.$$

Soient de plus α, β, γ, les longueurs des perpendiculaires abaissées des points A, B, C, sur les faces opposées; on a pareillement

$$\frac{3V}{\alpha} = \frac{bc}{2}\sin(b,c);$$
$$\frac{3V}{\beta} = \frac{ac}{2}\sin(a,c);$$
$$\frac{3V}{\gamma} = \frac{ab}{2}\sin(a,b);$$

à l'aide de ces valeurs, la relation précédente deviendra, après avoir effacé le facteur $9V^2$ commun à tous les termes,

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$
$$-\frac{2}{\alpha\beta}\cos(ac;bc) - \frac{2}{\alpha\gamma}\cos(ab,bc) - \frac{2}{\beta\gamma}\cos(ab,ac).$$

Mais parce que la hauteur d'une pyramide et l'une des arêtes

de son sommet sont la hauteur et l'hypothénuse d'un triangle rectangle, il s'ensuit que l'on a

$$\rho = a\cos(\rho, a); \qquad \rho = b\cos(\rho, b); \qquad \rho = c\cos(\rho, c);$$

par la même raison

$$\alpha = a\sin(a, bc); \qquad \beta = b\sin(b, ac); \qquad \gamma = c\sin(c, ab);$$

introduisant ces valeurs dans le résultat précédent, il viendra, après avoir chassé le dénominateur ρ^2, et réduit,

$$\begin{aligned} 1 = & \frac{\cos^2(\rho, a)}{\sin^2(a, bc)} + \frac{\cos^2(\rho, b)}{\sin^2(b, ac)} + \frac{\cos^2(\rho, c)}{\sin^2(c, ab)} \\ & - 2\frac{\cos(\rho, a)\cos(\rho, b)}{\sin(a, bc)\sin(b, ac)}\cos(ac, bc) \\ & - 2\frac{\cos(\rho, a)\cos(\rho, c)}{\sin(a, bc)\sin(c, ab)}\cos(ab, bc) \\ & - 2\frac{\cos(\rho, b)\cos(\rho, c)}{\sin(b, ac)\sin(c, ab)}\cos(ab, ac); \end{aligned}$$

et pour abréger,

$$E = 0.$$

Telle est la relation qu'il falloit trouver : cette relation, très-remarquable, fait partie de celles que M. Français a publiées dans le premier volume de cette Correspondance, page 343 ; je la rappelle ici, afin de faire connoître le moyen simple et direct de l'obtenir. On peut voir par la lettre insérée dans les *Annales de Mathématiques* (novembre 1812), l'usage que M. Français vient d'en faire pour résoudre analytiquement ce problême : *déterminer une sphère qui touche quatre sphères données* (1).

Extrait de la lettre citée, de M. Français à M. Gergonne.

Metz, 2 octobre 1812.

En éliminant de cette équation $E = 0$ de l'article précédent, deux des trois quantités $\cos(\rho, a)$, $\cos(\rho, b)$, $\cos(\rho, c)$, tirées des équations (5) de la page 64, deuxième volume de cette

---

(1) *Voyez* la solution analytique de ce problême, par M. Poisson, septembre 1812, *Bulletin de la Société Philomatique*.

Correspondance, la troisième sera donnée par une équation du second degré, et les deux autres seront données ensuite par les mêmes équations (5). Il ne restera donc plus à déterminer que la valeur de ρ, qui sera fournie par une quelconque des équations (4) du premier degré de la page citée 64, 2°. vol. *Voyez*, même page, les équations (1) et (2).

On trouve deux solutions pour la position de ρ, parce que les équations (2) sont les mêmes, aux signes près, soit qu'on prenne tous les signes supérieurs dans les équations (1), soit qu'on y prenne tous les signes inférieurs. Mais comme nous n'avons employé que les carrés des équations (2), qui comprennent l'un et l'autre signes, il s'ensuit que nous avons dû obtenir la solution des deux cas.

Remarque sur une classe particulière d'équations aux différences partielles à trois variables.

Par M. Poisson.

Je désignerai les variables par x, y, z, et je ferai pour abréger

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2z}{dydx}=s,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t.$$

Les équations que je veux considérer seront comprises sous cette forme :

$$P=(rt-s^2)^\alpha Q;$$

l'exposant α est supposé positif; Q désigne une fonction quelconque de x, y, z, qui renferme en outre les différences partielles de z, de tel ordre que l'on voudra, et qui n'est assujettie qu'à la seule condition de ne pas devenir infinie lorsque la quantité $rt-s^2$ devient nulle; enfin P représente une fonction des cinq quantités p, q, r, s, t, homogène par rapport aux trois dernières.

Cela posé, on satisfera toujours à une semblable équation, en prenant pour q une certaine fonction de p. En effet, soit

$$q=fp;$$

on aura en différentiant successivement, par rapport à x et y,

$$s=r.f'p,\qquad t=s.f'p=r.(f'p)^2;$$

ces valeurs de s et de t donnent $rt-s^2=0$; elles rendront

donc nul le second nombre de l'équation proposée; et en les substituant dans la fonction P, il résulte de sa forme homogène, qu'une même puissance de r sera facteur commun à tous les termes de cette fonction; divisant donc par cette puissance, l'équation ne contiendra plus que p, fp et $f'p$: ce sera une équation différentielle ordinaire; en l'intégrant, elle déterminera la forme de fp, et cette fonction contiendra une constante arbitraire.

L'équation $q = fp$, aux différences partielles du premier ordre peut toujours s'intégrer sous forme finie, par les procédés connus; outre la constante que cette équation contient déjà, son intégrale renfermera encore une fonction arbitraire; et cette intégrale satisfera à l'équation proposée. Donc une équation du second ordre ou d'un ordre plus élevé, de la forme de celles que nous considérons, a toujours, sous forme finie, une intégrale particulière en x, y, z, contenant une constante et une fonction arbitraires. Dans le plus grand nombre de cas, l'intégrale générale de l'équation proposée ne pourra pas s'obtenir; et alors il sera utile d'en avoir l'intégrale particulière que nous indiquons, indépendamment de l'intégrale générale. Appliquons cette remarque à des exemples particuliers.

Exemple I[er].

Soit proposée l'équation

$$t + 2ps + (p^2 - a^2)\,r = o, \qquad (1)$$

dans laquelle a^2 représente une constante positive. Cette équation est celle qui renferme les lois rigoureuses de la propagation du son dans un canal cylindrique horizontal, lorsque les vibrations de l'air ne sont pas traitées comme infiniment petites, et que la température est supposée constante.

Je substitue les valeurs précédentes de s et de t, savoir :

$$s = r.f'p, \qquad t = r.(f'p)^2,$$

dans cette équation; elle devient

$$[(f'p)^2 + 2pf'p + p^2 - a^2]\,r = o,$$

ou bien, en supprimant le facteur r, multipliant tous les termes par dp^2, et mettant dq à la place de $f'p.dp$,

$$dq^2 + 2pdpdq + (p^2 - a^2)\,dp^2 = o;$$

d'où l'on tire

$$dq = -(p \pm a)\,dp,$$

et en intégrant et désignant par c, la constante arbitraire,

$$q+\frac{1}{2}p^2+ap \pm c: \qquad (2)$$

le double signe $\pm$ est inutile devant le terme ap, parce que le carré a^2 étant seul donné, le signe de a est indéterminé.

Toute équation en p et q appartient, comme on sait, à une surface développable, et s'intègre en y satisfaisant au moyen de l'équation d'un plan dont on fait ensuite varier les constantes arbitraires. Soit donc

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma;$$

α, β, γ étant regardées comme des constantes, on aura $p=\alpha$, $q=\beta$, et, en vertu de l'équation (2),

$$\beta=c-a\alpha-\frac{\alpha^2}{2};$$

par conséquent, cette équation aura pour intégrale particulière

$$z=\alpha x+\left(c-a\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)y+\gamma.$$

Pour en déduire son intégrale générale, il faut, d'après le procédé connu, prendre pour γ une fonction arbitraire de α, et ensuite joindre à l'équation du plan, sa différentielle prise par rapport à α : le système de ces deux équations représentera l'intégrale générale de l'équation (2). Faisant donc $\gamma=\varphi\alpha$, ces équations seront

$$z=\alpha x+\left(c-a\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)y+\varphi\alpha,$$
$$0=x-(a+\alpha)y+\varphi'\alpha.$$

Elles satisfont à l'équation (2) comme intégrale générale, et à l'équation (1) comme intégrale particulière. A cause que le signe de a est indéterminé, cette intégrale de l'équation (1) équivaut réellement à deux : la seconde intégrale sera donnée par ce système d'équations,

$$z=\alpha x+\left(b+a\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)y+\psi\alpha,$$
$$0=x+(a-\alpha)y+\psi'\alpha;$$

b et $\psi\alpha$ étant la constante et la fonction arbitraires.

Dans le *Mémoire sur la Théorie du Son*, qui fait partie du quatorzième cahier du Journal de notre Ecole, j'ai donné (page 367), sous une forme différente et moins simple, des intégrales particulières de l'équation (1), qui reviennent à celles que nous venons de trouver.

EXEMPLE II[e].

Considérons l'équation

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0, \qquad (1)$$

qui appartient à la surface dont les deux courbures en chaque point sont égales et tournées en sens contraires. En y faisant $s=rf'p$, $t=r(f'p)^2$, elle devient

$$[1+q^2-2pq.f'p+(1+p^2)(f'p)^2]r=0;$$

si l'on supprime le facteur r, et que l'on multiplie tous les termes par dp^2, on a cette équation différentielle,

$$(1+q^2)\,dp^2-2\,pq\,dp\,dq+(1+p^2)\,dq^2=0. \qquad (2)$$

Pour l'intégrer, je la différentie d'abord en prenant la différentielle dp constante, ce qui donne $d^2y=0$; on aura donc

$$dq=adp, \qquad q=ap+b;$$

a et b étant deux constantes dont une seule doit rester arbitraire. En effet, en substituant ces valeurs de q et dq, dans l'équation (2), on trouve, toute réduction faite,

$$1+b^2+a^2=0, \quad \text{ou} \quad b=\sqrt{-1-a^2};$$

l'intégrale de cette équation est donc

$$q=ap+\sqrt{-1-a^2}; \qquad (3)$$

et cette valeur de q satisfait à l'équation (1), comme intégrale particulière.

L'équation (3) est facile à intégrer par les méthodes connues ; φ désignant la fonction arbitraire, on trouve pour son intégrale,

$$z=\varphi(x+ay)+y\sqrt{-1-a^2}, \qquad (4)$$

laquelle doit aussi satisfaire à l'équation (1), comme il est aisé de le vérifier.

Cette intégrale contient l'équation du plan, comme cas parti-

culier; car si l'on prend

$$\varphi(x+ay)=\alpha(x+ay)+\gamma,$$

et que l'on fasse, pour abréger,

$$\alpha a+\sqrt{-1-a^2}=\zeta,$$

l'équation (4) devient

$$z=\alpha x+\zeta y+\gamma;$$

α, ζ, γ, étant trois constantes arbitraires.

Non-seulement le plan est compris dans l'équation (4), mais il est la seule surface réelle que l'on en puisse déduire: au moyen de la fonction arbitraire qu'elle contient, on peut bien assujettir la surface représentée par cette équation, à passer par une courbe donnée; mais alors cette surface se réduira à une courbe isolée, de la même manière que les courbes planes se réduisent quelquefois à des points qu'on appelle *conjugués*. Par exemple, si l'on trace sur le plan des z et x une courbe quelconque, par laquelle on veut faire passer la surface en question, il faut faire $y=o$ dans l'équation (4), ce qui la réduit à $z=\varphi x$, équation qui doit coïncider avec celle de la courbe donnée, ce qui détermine la forme de la fonction φ. Maintenant, pour savoir si la surface s'étend hors du plan des x et z, je donne à y une valeur que l'on pourra supposer aussi petite qu'on voudra; développant la valeur de z, suivant les puissances de y, on aura

$$z=\varphi x+y(a\varphi' x+\sqrt{-1-a^2})+\frac{y^2}{2}a^2\varphi'' x+\text{etc.};$$

or, il est évident qu'excepté le cas où $\varphi' x$ seroit une quantité constante, le cofficient de y sera imaginaire, et par conséquent aussi la valeur de z. Le cas d'exception, où $\varphi' x$ est une constante, est le cas dans lequel la courbe tracée sur le plan des x et z, est une droite, et où la surface demandée est un plan; donc le plan est la seule surface réelle qui soit comprise dans l'équation (4).

Ce résultat étoit facile à prévoir, en observant que l'équation (1) est celle des surfaces dont les deux courbures en chaque point sont égales et contraires; d'ailleurs, l'équation (3) appartient à une surface développable, et même à un cylindre, dont la propriété est d'avoir en tous ses points une de ses courbures nulle; il faut donc, pour qu'une même surface satisfasse à-la-fois à ces deux équations, qu'elle ait ses deux courbures nulles, ou qu'elle soit plane dans toute son étendue.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

Par M. Monge.

Problème. — Etant donnée l'équation

$$\left.\begin{array}{r}Ax^2+By^2+Cz^2\\+2(Dyz+Ezx+Fxy)\end{array}\right\}=1 \quad (A)$$

d'une surface quelconque du second degré, rapportée à son centre comme origine, trouver la grandeur R d'un de ses demi axes rectangulaires ?

Solution. — Si l'on conçoit la sphère dont le rayon est R, et qui est concentrique à sa surface, l'équation de la surface de cette sphère, rapportée à la même origine et aux mêmes lignes des x, y, z, sera

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (B)$$

et ces deux surfaces se toucheront dans deux des sommets de la surface du second degré pour chacun desquels les quantités x, y, z, p, q auront les mêmes valeurs. Si l'on différentie partiellement ces deux équations, la première donnera

$$Ax+Fy+Ez+p(Ex+Dy+Cz)=0$$
$$Fx+By+Dz+q(\quad\quad\quad\quad)=0$$

et la seconde,

$$x+pz=0$$
$$y+qz=0.$$

Ces quatre dernières équations, par l'élimination des deux quantités p, q, donneront les deux nouvelles équations

$$z(Ax+Fy+Ez)-x(Ex+Dy+Cz)=0 \quad (C)$$
$$z(Fx+By+Dz)-y(\quad\quad\quad\quad)=0 \quad (D)$$

Et si entre les quatre équations (A), (B), (C), (D), on élimine les trois coordonnées x, y, z, il résultera l'équation qui donnera la valeur de R.

Pour faciliter cette élimination, faisons

$$Ax + Fy + Ez = L \quad (E)$$
$$Fx + By + Dz = M \quad (F)$$
$$Ex + Dy + Cz = N \quad (G)$$

ce qui introduit les trois nouvelles indéterminées L, M, N.

Les trois équations (A), (C), (D), deviendront

$$Lx + My + Nz = 1 \quad (A')$$
$$Lz = Nx \quad (C')$$
$$Mz = Ny \quad (D')$$

et nous aurons les sept équations (A'), (B), (C'), (D'), (E), (F), (G), entre lesquelles il faudra éliminer les six quantités x, y, z, L, M, N.

Or, les trois dernières équations (A'), (C'), (D'), donnent pour x, y, z, les valeurs suivantes

$$x = \frac{L}{L^2 + M^2 + N^2}$$
$$y = \frac{M}{L^2 + M^2 + N^2}$$
$$z = \frac{N}{L^2 + M^2 + N^2}$$

qui, substituées dans (B), donnent

$$\frac{1}{L^2 + M^2 + N^2} = R^2$$

donc les valeurs de x, y, z, deviendront

$$x = LR^2, \quad y = MR^2, \quad z = NR^2.$$

Actuellement si l'on substitue les valeurs de x, y, z, dans les trois équations (E), (F), (G), elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} L(AR^2-1)+MER^2+NER^2=0 \\ LFR^2+M(BR^2-1)+NDR^2=0 \\ LER^2+MDR^2+N(CR^2-1)=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(E')\\(F')\\(G')\end{array}$$

ou, faisant pour abréger,

$$AR^2-1=A'R^2$$
$$BR^2-1=B'R^2$$
$$CR^2-1=C'R^2,$$

on aura

$$LA'+MF+NE=0$$
$$LF+MB'+ND=0$$
$$LE+MD+NC'=0$$

entre lesquelles il ne s'agit plus que d'éliminer les trois quantités L, M, N, ce qui est possible, puisque les seconds membres sont tous trois égaux à zéro, et donnent pour résultat

$$A'B'C'+2DEF=A'D^2+B'E^2+C'F^2$$

enfin, remettant par A', B', C', leurs valeurs, et ordonnant par rapport à R, on a

$$\left.\begin{array}{l} R^6\{ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2\} \\ -R^4\{AB+CA+BC-D^2-E^2-F^2\} \\ +R^2\{A+B+C\} \\ -1 \end{array}\right\}=0.$$

Equation qui donne les valeurs des six demi axes rectangulaires ; ces demi axes sont égaux deux à deux et de signes contraires, ce qui réduit l'équation au troisième degré.

Autre Solution du même Problême,

Par M. HACHETTE.

Soit l'équation générale de la surface du second degré, rapportée à trois droites rectangulaires passant par son centre :

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H.$$

Et si entre les quatre équations (A), (B), (C), (D), on élimine les trois coordonnées x, y, z, il résultera l'équation qui donnera la valeur de R.

Pour faciliter cette élimination, faisons

$$Ax + Fy + Ez = L \quad (E)$$

$$Fx + By + Dz = M \quad (F)$$

$$Ex + Dy + Cz = N \quad (G)$$

ce qui introduit les trois nouvelles indéterminées L, M, N.

Les trois équations (A), (C), (D), deviendront

$$Lx + My + Nz = 1 \quad (A')$$

$$Lz = Nx \quad (C')$$

$$Mz = Ny \quad (D')$$

et nous aurons les sept équations (A'), (B), (C'), (D'), (E), (F), (G), entre lesquelles il faudra éliminer les six quantités x, y, z, L, M, N.

Or, les trois dernières équations (A'), (C'), (D'), donnent pour x, y, z, les valeurs suivantes

$$x = \frac{L}{L^2 + M^2 + N^2}$$

$$y = \frac{M}{L^2 + M^2 + N^2}$$

$$z = \frac{N}{L^2 + M^2 + N^2}$$

qui, substituées dans (B), donnent

$$\frac{1}{L^2 + M^2 + N^2} = R^2$$

donc les valeurs de x, y, z, deviendront

$$x = LR^2, \qquad y = MR^2, \qquad z = NR^2.$$

Actuellement si l'on substitue les valeurs de x, y, z, dans les trois équations (E), (F), (G), elles deviendront

$$\left.\begin{array}{llll} L(AR^2-1) & +MER^2 & +NER^2 & =0 \\ LFR^2 & +M(BR^2-1) & +NDR^2 & =0 \\ LER^2 & +MDR^2 & +N(CR^2-1) & =0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(E')\\(F')\\(G')\end{array}$$

ou, faisant pour abréger,

$$\begin{aligned} AR^2-1&=A'R^2\\ BR^2-1&=B'R^2\\ CR^2-1&=C'R^2, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} LA'+MF+NE&=0\\ LF+MB'+ND&=0\\ LE+MD+NC'&=0 \end{aligned}$$

entre lesquelles il ne s'agit plus que d'éliminer les trois quantités L, M, N, ce qui est possible, puisque les seconds membres sont tous trois égaux à zéro, et donnent pour résultat

$$A'B'C'+2DEF=A'D^2+B'E^2+C'F^2$$

enfin, remettant par A', B', C', leurs valeurs, et ordonnant par rapport à R, on a

$$\left.\begin{array}{l} R^6\{ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2\} \\ -R^4\{AB+CA+BC-D^2-E^2-F^2\} \\ +R^2\{A+B+C\} \\ -1 \end{array}\right\}=0.$$

Equation qui donne les valeurs des six demi axes rectangulaires; ces demi axes sont égaux deux à deux et de signes contraires, ce qui réduit l'équation au troisième degré.

Autre Solution du même Problême,

Par M. Hachette.

Soit l'équation générale de la surface du second degré, rapportée à trois droites rectangulaires passant par son centre :

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H.$$

Je suppose qu'on ait l'équation du plan tangent à cette surface en un point x', y', z' ;

$$\left.\begin{array}{l} x(Ax' + B''y' + B'z') \\ +y(B''x' + A'y' + Bz') \\ +z(B'x' + By' + A''z') \end{array}\right\} = H$$

et pour abréger,

$$Lx + My + Nz = H.$$

On obtient cette équation en menant par le point x', y', z', une droite qui coupe la surface en un point x'', y'', z''. Les équations de cette droite sont de la forme

$$x - x' = l(z - z'), \quad y - y' = m(z - z').$$

Cette droite de sécante devient une tangente de la surface, lorsqu'on a

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z''.$$

De ces trois équations, on déduit la relation des deux constantes l et m, pour que la droite soit une tangente. On substitue dans l'équation entre l et m, pour l, $\frac{x - x'}{z - z'}$, pour m, $\frac{y - y'}{z - z'}$, et l'équation en x, y, z, qu'on obtient, appartient au plan qui touche la surface du second degré au point x', y', z'.

Nommant X, Y, Z, les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan tangent $Lx + My + Nz = H$, et R la longueur de cette perpendiculaire

$$R = \frac{H}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

$$X = \frac{LR^2}{H}, \quad Y = \frac{MR^2}{H}, \quad Z = \frac{NR^2}{H}.$$

Lorsque cette perpendiculaire se confond avec l'un des axes principaux de la surface, on a

$$X = x', \quad Y = y', \quad Z = z',$$

ce qui donne

$$R^2 - Hx' = 0, \quad R^2M - Hy' = 0, \quad R^2N - Hz' = 0.$$

Substituant dans ces trois équations pour L, M, N, les quantités qu'elles représentent, elles deviennent

$$R^2(Ax' + B''y' + B'z') - Hx' = 0,$$
$$R^2(B''x' + A'y' + Bz') - Hy' = 0,$$
$$R^2(B'x' + By' + A''z') - Hz' = 0.$$

Les équations de la perpendiculaire à la surface du second degré, qui coïncide avec l'un des axes principaux de cette surface, sont

$$x = \frac{x'}{z'}z, \qquad y = \frac{y'}{z'}z;$$

nommant λ et μ les deux tangentes $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, qui déterminent la direction de cet axe, les trois équations précédentes deviendront

$$R^2(A\lambda + B''\mu + B') - H\lambda = 0, \qquad (1)$$
$$R^2(B''\lambda + A'\mu + B) - H\mu = 0, \qquad (2)$$
$$R^2(B'\lambda + B\mu + A'') - H = 0. \qquad (3)$$

De ces trois équations, on éliminera successivement deux des trois inconnues $\frac{R^2}{H}$, λ et μ, chaque équation finale sera du troisième degré.

Paris, le 18 janvier 1813.

Pendant mon dernier séjour en Italie, ayant eu connoissance du savant rapport (*) de notre ami M. Poisson, sur une matière dont je m'étois occupé, j'écrivis, à ce sujet, le simple énoncé des résultats qui n'étoient pas encore sortis de ma mémoire.

J'adressai cet exposé succinct à M. Sané, Inspecteur général du Génie maritime, le priant de présenter ma notice à la Classe de l'Institut, dont il fait partie. Je désirerois que vous voulussiez insérer dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, cette même notice que je joins à ma lettre.

Signé Ch. Dupin.

(*) Séance de l'Institut, 31 août 1812.

Mémoire sur la Sphère tangente à trois ou à quatre autres;

Par CH. DUPIN.

Pise, 1er. octobre 1812.

Notice.

Un problême dont beaucoup de Géomètres se sont occupés, est celui de mener sur un plan un cercle tangent à trois autres cercles, et plus généralement, dans l'espace, une sphère tangente à quatre sphères données.

Si je ne me trompe, le premier géomètre qui l'ait complètement résolu, est Fermat (*). Depuis, Euler a repris la même question; mais tandis que Fermat s'étoit servi de la méthode des Anciens, Euler a employé l'analyse. M. Carnot, dans sa *Géométrie de position*, s'en est encore occupé. Enfin, plusieurs élèves de l'Ecole Polytechnique ont atteint le même but par les méthodes de la *Géométrie descriptive*. Parmi ces derniers, je citerai surtout l'infortuné Dupuis, qui par ses premiers succès sembloit promettre de beaux progrès à la géométrie. Quelle est donc la fatalité qui nous a sitôt enlevé les trois hommes qui cultivoient plus particulièrement la science de l'étendue pour hériter de la gloire de nos premiers créateurs en ce genre? Nous avons vu disparoître, presque à-la-fois, Dupuis, Lancret et Malus!

On connoît quelques résultats de leurs travaux sur le sujet qui nous occupe; je crois d'ailleurs que la méthode qui les y a conduits n'a pas été transmise à l'Ecole Polytechnique, du moins je ne sache pas qu'aucun professeur l'ait fait connoître, ou seulement l'ait conservée; et leur démonstration, qu'on trouve dans la Correspondance Polytechnique, appartient à M. Hachette.

J'ai osé, il y a dix ans, reprendre un sujet traité si souvent, et jamais, ce me semble, avec la généralité qu'il comporte. J'eus l'honneur de soumettre mes solutions à M. Monge, et j'eus le bonheur d'obtenir, d'un tel géomètre, des encouragemens, trop indulgens, sans doute. M. Carnot, après avoir examiné les mêmes recherches, voulut bien m'engager à les compléter en y joignant la solution de quelques autres questions, parmi lesquelles

(*) Voyez cette solution dans le mémoire traduit par M. Hachette, septième et huitième cahiers du Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction.

étoit celle-ci : *tracer sur la sphère un cercle tangent à trois autres*. J'offris, le lendemain même, à cet illustre savant, la solution de cette question, mais généralisée, en déterminant soit par la géométrie, soit par l'analyse, la courbe plane tracée sur une surface du second degré tangentiellement à trois autres sections planes quelconques. De là j'eus occasion de déduire immédiatement, par les considérations de la géométrie aux trois dimensions, plusieurs des belles propriétés qu'on trouve dans la *Géométrie de position*, sur les polygones inscrits aux courbes du second degré, et les points de concours de leurs diagonales ou de leurs côtés prolongés.

Il fut décidé que mon mémoire feroit partie de la collection des journaux de l'École Polytechnique. L'impression de mon mémoire ayant été retardée, je le retirai pour le perfectionner; et, dans un voyage précipité que je dus faire en Belgique, je le perdis.

J'ai su depuis que M. Hachette a rendu compte de mes travaux au sujet des questions traitées dans ce mémoire, en donnant l'analyse d'une des solutions qu'il contenoit. Cette analyse est dans le second cahier de la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique (premier volume).

Depuis cette époque, envoyé tour-à-tour en Hollande, en Italie, dans le midi de la France et dans les îles Ioniennes, je n'ai jamais refait mon mémoire. Cependant prêt à revoir ma patrie, j'apprends par un de mes amis que l'Institut a fait l'objet de son examen, d'un travail très-intéressant, où la question du contact des cercles et des sphères est généralement résolue, mais, à ce qu'il paroît, par des principes différens.

Encore convalescent, aux bains de Pise, je suis incapable d'un travail suivi. Je me bornerai donc, pour l'instant, à présenter l'énoncé des principaux théorêmes que ma mémoire pourra me rappeler, me réservant, si je recouvre la santé, de rédiger de nouveau mes solutions, et d'en faire hommage à mes juges, si les résultats que je vais indiquer ont le bonheur de mériter leur indulgence.

I.

De la Sphère tangente à trois autres, et ensuite à quatre autres.

Une infinité de sphères peuvent être tangentes à trois sphères invariables données; à chaque nouvelle sphère tangente aux trois primitives correspond, 1° un point de contact entr'elle et celles-ci; 2°. son propre centre : cela posé,

La suite des points de contact marqués sur chaque sphère primitive par les nouvelles sphères, forme une courbe continue plane, et par conséquent circulaire.

La suite des centres des nouvelles sphères forme pareillement une courbe plane et continue, mais d'une forme plus générale; c'est une courbe du second degré.

Ces deux beaux théorêmes sont dus à Dupuis, qui nécessairement a dû parvenir aussi à quelques-uns des résultats suivans, quoique je n'en aie pas eu connoissance.

Si l'on conçoit les trois (1) cônes circonscrits aux trois sphères primitives prises deux à deux, on sait que leurs sommets sont en ligne droite : cette droite est évidemment dans le plan, lieu des centres de ces trois sphères.

Maintenant le plan de la courbe, lieu des centres des nouvelles sphères, est toujours perpendiculaire à cette droite.

De plus, si l'on considère en particulier une des nouvelles sphères (tangentes aux trois primitives), que par le point de contact qu'elle a sur chacune des trois sphères primitives, on mène trois tangentes aux courbes de contact tracées sur celles-ci, d'abord ces tangentes se rencontreront, et elles se rencontreront toutes trois en un seul et même point.

Lorsque la nouvelle sphère variera, les tangentes prendront dans l'espace une autre direction; mais elles se couperont toutes trois encore en un même point, et la suite de tous ces points d'intersection formera une ligne droite.

Cette droite sera toujours perpendiculaire au plan des centres des trois sphères données. Il y a plus, elle sera placée sur le plan, lieu des centres de toutes les nouvelles sphères.

Enfin, la tangente à la courbe, lieu des centres, viendra constamment passer par cette droite, précisément par le point d'intersection des tangentes aux courbes de contact, et en formant le même angle avec ces trois dernières tangentes. Ainsi cette droite est à-la-fois l'intersection de quatre plans, savoir, celui de la courbe des centres et les trois plans des courbes de contact; or cette droite remarquable est telle, que les cônes circonscrits à-la-fois à deux des sphères cherchées, ont tous leurs centres sur elle.

Elle joue donc, par rapport aux nouvelles sphères, le même

(1) Il y en a six, et ce sont leurs combinaisons deux à deux qui produisent les diverses solutions de la question, mais elles sont indépendantes; et ce qui est vrai pour l'une est applicable à toutes les autres : dans cette notice nous n'en considérerons qu'une seule.

rôle que la droite, lieu des centres des cônes circonscrits aux sphères primitives prises deux à deux, joue par rapport à ces premières sphères.

Lorsqu'une sphère nouvelle touche seulement deux des primitives, les plans menés tangentiellement à ces surfaces primitives par leur point de contact avec l'autre, se coupent suivant une droite constamment placée dans un même plan, tant que les deux sphères primitives restent les mêmes.

En considérant ainsi deux à deux les trois sphères primitives, on trouvera trois plans remarquables; ils se couperont tous trois suivant une même droite, et cette droite, ce sera précisément le lieu des points de concours des tangentes aux trois courbes de contact et de la tangente à la courbe des centres, toutes quatre correspondant à une seule et même sphère nouvelle.

Dans le cas où l'on auroit quatre sphères primitives, auxquelles il faudroit trouver une sphère tangente, on trouveroit ainsi six plans remarquables, dont chacun seroit le lieu des intersections des plans tangens à la sphère nouvelle et aux primitives prises deux à deux; ces plans seroient perpendiculaires aux six arêtes de la pyramide triangulaire ayant pour sommets les centres des sphères primitives, etc.

Ces plans se couperont trois à trois suivant une même droite: ils présenteront ainsi quatre droites, qui elles-mêmes se rencontreront en un seul et même point. Enfin ce point sera à-la-fois 1°. sur les plans des courbes des centres des sphères tangentes aux primitives prises trois à trois; 2°. sur les plans des courbes de contact de ces nouvelles sphères et des primitives.

De là résulte une méthode de géométrie descriptive, aussi simple que facile, pour résoudre tous les problêmes des sphères tangentes à trois ou à quatre autres, des cercles tangens à trois autres, etc. (1)

Passons à d'autres considérations, et demandons-nous maintenant de quelle nature est la surface enveloppe de l'espace parcouru par une sphère tangente à trois sphères invariables primitivement données.

II.

Surface engendrée par la Sphère qui s'appuie sur trois autres.

Cette surface jouit de la propriété constante, et elle en jouit

(1) On la fera connoître dans le prochain cahier de la Correspondance.

seule, d'avoir, dans toute son étendue, des cercles pour ses deux lignes de courbures. Ainsi, après l'avoir déterminée généralement, si l'on prend trois des sphères mobiles génératrices, qu'on les regarde comme fixes et invariables, et qu'ensuite on se demande quelle surface enveloppera l'espace parcouru par une autre sphère variable et partout tangente à ces trois-ci, on retrouvera précisément l'enveloppe de l'espace parcouru par la sphère mobile et variable, toujours tangente aux trois primitives.

Le lieu des centres de courbure de cette enveloppe n'est point formé par deux nappes de surface, mais par deux courbes distinctes. L'une d'elles est une ellipse, l'autre est une hyperbole. La première a pour sommets les foyers de la seconde, et pour foyers les sommets de celle-ci. Enfin, leurs plans sont perpendiculaires.

Cela posé, si l'on attache des fils, d'abord à tous les points de l'ellipse, qu'on les tende et les réunisse en un seul point, de manière à en former le faisceau des arêtes d'un cône de révolution; lorsqu'ensuite on alongera, ou qu'on raccourcira tous les fils d'une égale quantité; 1°. tous les fils ne cesseront pas d'être tendus; 2°. ils formeront un cône, plus ou moins fermé, mais toujours de révolution; 3°. le sommet du cône décrira l'hyperbole, lieu des centres de l'autre courbure; 4°. enfin, la tangente à cette hyperbole au sommet, ou, pour mieux dire, au centre de chaque cône, sera constamment l'axe de ce cône.

Et réciproquement, si l'on attachoit tous les fils aux divers points de l'hyperbole, qu'on les tendît, et qu'avec le point qui les réunit, on voulût parcourir l'ellipse, 1°. les fils s'alongeroient ou se raccourciroient toujours d'une égale quantité; 2°. le cône ne cesseroit pas d'être de révolution, etc.

Ainsi les courbes du second degré ont une infinité de foyers; elles peuvent être décrites librement dans l'espace, et d'une infinité de manières différentes, par trois rayons vecteurs partis de trois foyers fixes et placés sur une autre courbe du second degré, etc.

Quand l'une des deux courbes est une parabole, l'autre l'est également: les deux paraboles sont égales, etc.

L'analyse de ces propriétés est aussi consignée dans la Correspondance Polytechnique, dans le précis d'un travail que j'ai fait sur la théorie des déblais et remblais, avec quelques applications à l'optique, tom. 1, pag. 218.

Nous ne pousserons pas plus loin la discussion de la surface enveloppe dont les deux lignes de courbure sont des cercles, elle

conduit à quelques propriétés remarquables, à celle-ci, par exemple :

Toutes les lignes d'une des courbures sont dans des plans qui passent à-la-fois par une première droite, placée sur le plan lieu des centres de l'autre courbure ; toutes les lignes de l'autre courbure sont dans des plans qui passent à-la-fois par une seconde droite, placée sur le plan lieu des centres de la première courbure ; et l'axe commun de l'ellipse et de l'hyperbole, lieux des centres, est dirigé sur la ligne qui mesure la plus courte distance de ces deux droites : enfin, les lignes d'une même courbure, prises deux à deux, sont toutes sur des cônes du second degré, par conséquent ils sont deux à deux sur une même sphère, propriété remarquable ; et les sommets de ces cônes sont encore placés sur les droites qui dirigent la position de ces lignes de courbure.

De là suit cette propriété générale de la sphère : je prends sur la sphère une corde quelconque, je mène les deux plans tangens à la sphère, aux extrémités de cette corde, et je trace la droite intersection de ces deux plans ; cela posé,

Je conçois toutes les sections planes, faites sur la sphère, 1°. par la corde ; 2°. par l'autre droite. Les circonférences de ces sections se couperont partout à angle droit. Cette propriété peut trouver son application dans la coupe des pierres.

THÉORÊME DE GÉOMÉTRIE.

Etant données trois sphères fixes, on suppose qu'une sphère dont le centre et le rayon varient, touche constamment les trois sphères données ; *le lieu des points de contact de la sphère variable et de l'une quelconque des sphères fixes, est un petit cercle de cette dernière sphère*, dont le plan est perpendiculaire à celui qui passe par les centres des trois sphères données. (*Voyez* le premier volume de la Correspondance, page 19.)

Démonstration analytique, par M. Hachette.

En rapportant l'espace aux trois axes rectangulaires des x, des y, des z, je suppose que le plan mené par les centres des trois sphères données, soit le plan des xy, et que les centres de ces

sphères soient, le premier à l'origine des coordonnées, le second sur l'axe des x, et le troisième en un point donné du plan xy.

Nommons r, r', r'', ρ, les rayons des trois sphères données et de la sphère qui les touche; a' la distance du centre de la seconde sphère à l'origine des coordonnées; a'', b'', les coordonnées du centre de la troisième sphère; α, β, γ, les coordonnées du centre de la sphère du rayon ρ.

Lorsque deux sphères se touchent, la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons. En appliquant ce principe à la distance des centres de la sphère du rayon ρ et de chacune des sphères qu'elle touche, on aura les trois équations suivantes :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r)^2. \qquad (1)$$

$$(\alpha - a')^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r')^2. \qquad (2)$$

$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r'')^2. \qquad (3)$$

Ces trois équations représentent celles qu'on obtiendroit en prenant toutes les combinaisons des termes affectés du signe $\pm$; ces combinaisons, au nombre de huit, peuvent s'écrire ainsi

$$\rho + r, \text{ ou } \rho - r \left\{ \begin{array}{ll} \rho + r', & \rho + r'' \\ \rho + r', & \rho - r'' \\ \rho - r', & \rho + r'' \\ \rho - r', & \rho - r'' \end{array} \right\}$$

La quantité $\rho + r$, ou $\rho - r$, peut se combiner avec chacune des deux autres placées sur une même horizontale de ce tableau; ce qui donne évidemment huit combinaisons. Ne considérant que la première de ces combinaisons,

$$\rho + r, \quad \rho + r', \quad \rho + r'',$$

les équations (1), (2), (3), deviendront

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho + r)^2 \qquad (A)$$

$$(\alpha - a')^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho + r')^2 \qquad (B)$$

$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 + \gamma^2 = (\rho + r'')^2 \qquad (C)$$

Retranchant successivement de l'équation (A), les équations (B)

et (C), on aura

$$2\rho(r-r')=2a'\alpha-a'^2-(r^2-r'^2) \qquad (b)$$
$$2\rho(r-r'')=2a''\alpha+2b''\beta-a''^2-b''^2-(r^2-r''^2) \qquad (c)$$

Eliminant ρ, qui est linéaire dans ces deux équations (b) et (c),

$$\left.\begin{array}{l}(r-r')\{2a''\alpha+2b''\beta-a''^2-b''^2-r^2+r''^2\}\\ -(r-r'')\{2a'\alpha-a'^2-r^2+r'^2\}\end{array}\right\}=0. \quad (D)$$

Cette équation (D) étant linéaire en α, β, coordonnées du centre de la sphère qui touche les trois sphères données, et ne contenant ni la troisième coordonnée γ de ce centre, ni le rayon ρ de cette sphère, il suit que les centres de toutes les sphères tangentes aux trois sphères données, sont dans un plan perpendiculaire au plan des xy, et qui passe par la droite, dont on aura l'équation en mettant dans l'équation (D), au lieu de α, β, les coordonnées x, y, d'un point quelconque de cette droite. Supposons qu'après cette substitution, elle devienne

$$(5)\left\{\begin{array}{l}(r-r')(2a''x+2b''y-A)-(r-r'')(2a'x-B).\\ \text{ou } (r'-r)(\qquad\qquad\qquad\qquad)-(r''-r)(\qquad\qquad),\end{array}\right.$$

A et B étant des constantes connues, qui ne changent pas, quel que soit le signe des rayons r, r', r''. Cette équation (5) représente celles qui correspondent aux valeurs de $r-r'$ et $r-r''$, dépendantes des signes des rayons r', r''. Or, ces valeurs sont au nombre de quatre :

1°. $r-r'$ et $r-r''$;
2°. $r-r'$ et $r+r''$;
3°. $r+r'$ et $r-r''$;
4°. $r+r'$ et $r+r''$.

En changeant dans l'équation (5) les signes des rayons r, r', r'', on changeroit seulement les signes de tous les termes de cette équation; ce qui prouve que l'équation (5) ne représente que quatre droites différentes. D'où il suit que les centres des sphères du rayon variable ρ, qui touchent les trois sphères données, sont contenues dans quatre plans, dont l'un correspondant aux différences $r-r'$, $r-r''$, a pour trace la droite de l'équation (5) (x et y étant les coordonnées d'un point de cette droite).

Concevons la droite menée par l'origine des coordonnées, centre de la première des sphères données, et par le point α, β, γ,

centre de la sphère donnée ρ, qui les touche ; cette droite a pour équation

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}.$$

Elle coupe la première sphère dont l'équation est $x^2+y^2+z^2=r^2$, en un point pour lequel on a

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{r}{r+\rho}; \text{ d'où l'on tire } \rho=\frac{r(\alpha-x)}{x}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b), cette équation donne

$$(E)\left\{\begin{array}{l} 2\alpha=\dfrac{x(a'^2-(r-r')^2)}{a'x-r(r-r')}, \\ \text{et à cause de } \quad 2\beta=\dfrac{2\alpha y}{x}, \quad 2\gamma=\dfrac{2\alpha z}{x}, \\ 2\beta=\dfrac{y(a'^2-(r-r')^2)}{a'x-r(r-r')}, \quad 2\gamma=\dfrac{z(a'^2-(r-r')^2)}{a'x-r(r-r')} \end{array}\right.$$

Mettant ces valeurs de 2α et 2β dans l'équation (D), et l'ordonnant par rapport à x et à y, on a

$$(F)\left\{\begin{array}{l} x\left\{\begin{array}{l}(a'^2-(r-r')^2)(a''(r-r')-a'(r-r'') \\ -a'(r-r')(a''^2+b''^2+r^2-r''^2)-a'(r-r'')(r'^2-r^2-a^2)\end{array}\right\} \\ +b^2y(r-r')(a'^2-(r-r')^2) \\ -r(r-r')^2(a''^2+b''^2+r^2-r''^2)-r(r-r')(r-r'')(a^2+r^2-r'^2) \end{array}\right\}=0.$$

Equation linéaire en x et y, et qui est satisfaite en changeant les signes des rayons r, r', r''. Elle ne contient ni le rayon ρ, ni les coordonnées α, β, γ, du centre de la sphère mobile, qui touche les trois sphères données ; elle exprime la relation des coordonnées x, y, du point de contact de cette sphère mobile et de la sphère fixe $x^2+y^2+z^2=r^2$. Donc le lieu de ces points de contact est un petit cercle de la sphère fixe, dont le plan est perpendiculaire à celui des xy, qui contient les centres des trois sphères données.

Mettant successivement dans l'équation (F), pour les différences $r-r'$ et $r-r''$, les quatre valeurs qui correspondent aux signes des rayons r, r', r'', on aura les équations des quatre petits

cercles de la première sphère, correspondans aux quatre séries des sphères qui peuvent toucher les trois sphères données.

Quoique nous n'ayons considéré que la sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées, la démonstration précédente s'applique également aux deux autres sphères, puisque, sans changer leur position respective, on pourroit transporter l'origine des coordonnées au centre de l'une ou l'autre de ces deux sphères.

Rectification d'un arc d'ellipse par les séries;

Par M. de STAINVILLE, Répétiteur-Adjoint à l'Ecole Polytechnique.

Supposons que l'arc dont il s'agit, ait son origine à l'une des extrémités du petit axe, et que les abscisses soient comptées sur le grand axe à partir du centre. Si on désigne par x l'abscisse qui correspond à l'arc u, il est clair que l'expression de cet arc ne doit contenir que des termes multipliés par des puissances de x, puisqu'il s'évanouit lorsqu'on fait $x = 0$; et comme il change de signe avec x, sans changer de grandeur, il en résulte que le développement de l'arc exprimé par l'abscisse ne doit contenir que des puissances impaires de x. Ainsi on aura, pour toutes les valeurs de u,

$$u = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

Si on différentie cette équation par rapport à x, on aura

$$\frac{du}{dx} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \text{etc.} \qquad (1)$$

Mais

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}}.$$

Si donc on représente $\frac{du}{dx}$ par y, on aura, après avoir elevé

les deux membres au carré et fait disparoître les dénominateurs ; l'équation

$$1 - e^2x^2 = y^2 (1 - x^2).$$

Différentiant cette nouvelle équation, par rapport à x, on en aura une autre qui se réduira au moyen de substitutions convenables à

$$y^2 - 1 = (x - x^3) y \frac{dy}{dx}.$$

Divisant par y, et différentiant, on aura, après quelques réductions, une équation différentielle du second ordre, qui sera

$$\frac{dy}{dx}(1 + 2x^2 - 3e^2x^4) = \frac{d^2y}{dx^2}(x - x^3 - e^2x^3 + e^2x^5).$$

Si, pour abréger, on représente les coefficiens du développement de $\frac{du}{dx}$, ou de y par $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, on aura

$$y = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha + 3.4\beta x^2 + 5.6\gamma x^4 + \ldots$$

Portant ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation différentielle du second ordre, on aura, en supprimant le premier terme de chaque membre, l'équation suivante

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} \begin{array}{r} 4\beta \\ +4\alpha \end{array} & x^3 \begin{array}{r} +6\gamma \\ +8\beta \\ -2.3\alpha e^2 \end{array} & x^5 \begin{array}{r} +8\delta \\ +12\gamma \\ -3.4\beta e^2 \end{array} & x^7 \begin{array}{r} +\text{etc.} \\ +\text{etc.} \\ -\text{etc.} \end{array} \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} \begin{array}{r} +3.4\beta \\ -2\alpha \\ -2\alpha e^2 \end{array} & x^3 \begin{array}{r} +5.6\gamma \\ -3.4\beta \\ -3.4\beta e^2 \\ +2\alpha e^2 \end{array} & x^5 \begin{array}{r} +7.8\delta \\ -5.6\gamma \\ -5.6\gamma e^2 \\ +3.4\beta e^2 \end{array} & x^7 \begin{array}{r} +\text{etc.} \\ -\text{etc.} \\ -\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array} \end{array}$$

Comparant les coefficiens des termes affectés des mêmes puis-

sances de x, on aura

$$2.\ 4\beta = (3 + e^2).\ 2\alpha$$
$$4.\ 6\gamma = (5 + 3e^2).\ 4\beta - 8.\ 1.\ \alpha e^2$$
$$6.\ 8\delta = (7 + 5e^2).\ 6\gamma - 8.\ 3.\ \beta e^2$$
$$8.\ 10\varepsilon = (9 + 7e^2).\ 8\delta - 8.\ 6.\ \gamma e^2$$
$$10.\ 12\zeta = (11 + 9e^2).10\varepsilon - 8.10.\ \delta e^2$$
....

En général, si on désigne par χ le coefficient de $x^{2\mu}$, on aura, en appelant φ et ψ les coefficiens des deux termes qui précèdent immédiatement ce dernier,

$$(2\mu-2)2\mu\chi = \{2\mu-1+(2\mu-3)e^2\}(2\mu-2)\psi - 8\ \frac{(\mu-2)\ (\mu-1)}{2}\ \varphi.e^2.$$

Pour déterminer α, il faut développer $\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$ jusqu'au second terme, et on aura $\alpha = \frac{1-e^2}{2}$, ou ce qui revient au même $\alpha = \frac{b^2}{2}$; portant cette valeur dans les autres coefficiens, ils seront tous déterminés, et on aura, à cause des équations $2B = \alpha$; $3C = \beta$; $4D = \gamma$, etc, l'équation suivante,

$$u = x + \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^5}{5} + \frac{\gamma x^7}{7} + \text{etc.}$$

Si on fait

$$2\alpha = \alpha_{,} b^2$$
$$2.\ 4\beta = \beta_{,} b^2$$
$$2.\ 4.\ 6\gamma = \gamma_{,} b^2$$
$$2.\ 4.\ 6.\ 8\delta = \delta_{,} b^2$$
....

L'équation précédente se présente sous une forme plus élégante, et on a

$$u = x + \frac{\alpha_{,} b^2 x^3}{2.3} + \frac{\beta_{,} b^4 x^5}{2.4.5} + \frac{\gamma_{,} b^6 x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

Pour déterminer α_i, β_i, γ_i, etc., on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= 1 \\
\beta_i &= \{\,3 + e^2\,\}\,\alpha_i \\
\gamma_i &= \{\,5 + 3e^2\}\,\beta_i - 8.\ 1.\ \alpha_i\, e^2 \\
\delta_i &= \{\,7 + 5e^2\}\,\gamma_i - 8.\ 3.\ \beta_i\, e^2 \\
\varepsilon_i &= \{\,9 + 7e^2\}\,\delta_i - 8.\ 6.\ \gamma_i\, e^2 \\
\zeta_i &= \{11 + 9e^2\}\,\varepsilon_i - 8.\ 10.\ \delta_i\, e^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si dans ces équations on fait $e = 0$, les coefficiens prennent des valeurs qui, étant introduites dans la formule

$$u = x + \frac{\alpha_i b^2 x^3}{2.3} + \frac{\beta_i b^2 x^5}{2.4.5} + \frac{\gamma_i b^2 x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

donnent

$$u = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

ce qui doit être, car l'hypothèse de $e = 0$ faisant rentrer l'ellipse dans le cercle, l'expression d'un arc d'ellipse doit alors coïncider avec celle de l'arc correspondant du cercle : ce qui a lieu ici, puisque x est égal au sinus de l'arc u.

Démonstration de la formule qui donne la tangente de la somme de plusieurs arcs en fonction des tangentes de ces arcs ;

Par M. de Stainville.

Pour arriver à cette formule de la manière la plus simple, nous considérerons le produit des facteurs

$\cos a + \sin a\sqrt{-1}$, $\cos b + \sin b\sqrt{-1}$, $\cos c + \sin c\sqrt{-1}$;

ce produit, ainsi qu'on le sait, est égal à

$$\cos(a + b + c + \ldots.) + \sin(a + b + c + \ldots.)\sqrt{-1}.$$

Ainsi le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le produit des facteurs dont

les deux tiers du parallélogramme fait sur l'abscisse et
née : le demi-segment inférieur *APN* étant égal au supé-
4PM, il s'ensuit que le segment total *MAN* est les deux
ı parallélogramme circonscrit.

Quadrature de la Cycloïde.

le point le plus élevé de la cycloïde menons une parallèle
ıse, qui soit terminée par les perpendiculaires élevées aux
nités de cette base, on aura un rectangle *ACML* (fig. 2)
a base sera égale à la circonférence du cercle générateur,
nt la hauteur sera égale au diamètre de ce même cercle ;
onséquent l'aire de ce rectangle sera quadruple de celle du
le générateur. Cela posé, si par deux points *G* et *H* pris sur
ycloïde, on mène des tangentes à cette courbe, que par les
ıes points on mène des parallèles à la base jusqu'à la ren-
.re du cercle *DEBD*, et que l'on tire les cordes *DE*, *DF*,
; seront respectivement égales et parallèles à *GK* et *HI* ;
conséquent si les points *G* et *H* sont infiniment près, le
ngle élémentaire *IHK* est égal au secteur élémentaire *EDF* ;
si la somme de tous les triangles élémentaires qui composent
re du triangle mixtiligne *ALD* sera égale à celle de tous les
ıits secteurs élémentaires qui composent le demi-cercle *DEB*.
; triangle mixtiligne *DCM* étant égal au demi-cercle *DNB*,
en résulte que les deux triangles mixtilignes *ALD*, *CMD*,
uivalent au cercle *DEBND* ; si on les retranche du rectangle
CML, qui est quadruple du cercle *DEBND*, il restera, pour
aire de la cycloïde, le triple de l'aire du cercle générateur.

Qua... garithmique.

Soient *M* et *m* ... le cette courbe que nous
supposerons infini... re ; si par l'un et l'a...
le ce... courbe et des ord...
... ıra, en vertu des ...
... les points *M* ...
... ıd avec la tang...
... llèle à *mt*, et *T*...
... amme *KTo*...
... sera ... galement ; p...
... ıséque... *TK*, et comm...
... ui-ci n... ıt est infini...
... nt petit ... *Tt*. Si par u...
... tre point ... gente *m*...

somme d'un nombre quelconque d'arcs est égale à la somme des produits de chaque sinus par le produit des cosinus des autres arcs, moins les produits trois à trois des sinus des arcs par les cosinus des autres arcs, plus tous les produits cinq à cinq de ces mêmes sinus multipliés respectivement par les cosinus des autres arcs, et ainsi de suite; 2°. que le cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs est égal au produit des cosinus de ces arcs, moins les produits deux à deux des sinus par les produits des cosinus des autres; plus, la somme des produits quatre à quatre des sinus de ces arcs par les produits des cosinus des autres arcs, et ainsi de suite. Si dans la première formule, ainsi que dans les deux autres, on suppose que tous les arcs soient égaux entr'eux et à a, on aura celles qui donnent les tangentes sinus et cosinus des arcs multiples, et coïncideront avec celles que Jean Bernoulli a données le premier.

Quadrature de la Parabole, de la Cycloïde et de la Logarithmique, par la considération des infiniment petits;

Par M. de Stainville.

Quadrature de la Parabole. (Pl. 2.)

Soit MAN un segment de parabole (fig. 1, pl. 2): si par le point P, milieu de MN, on mène la droite PA parallèle à l'axe, elle sera un diamètre et divisera toutes les droites parallèles à MN, et par conséquent l'aire du segment MAN en deux parties égales. Si par le point M on mène la tangente MT, on aura $AT = AP$. Si par tout autre point m de cette courbe on mène une ordonnée mp au diamètre AP, et une tangente mt à la même courbe, on aura $At = Ap$, ainsi $Tt = Pp$. Si on suppose que le point m soit infiniment près du point M, le triangle élémentaire MTt sera la moitié du parallélogramme élémentaire $MPpm$, puisque les bases et les hauteurs sont égales; par conséquent la somme des triangles élémentaires qui composent le triangle mixtiligne MAT, sera la moitié de celle des parallélogrammes élémentaires qui composent le demi-segment de parabole, dont il résulte que le demi-segment parabolique est les deux tiers du triangle MPT fait sur l'ordonnée et la soutangente; ou ce qui revient au

même, les deux tiers du parallélogramme fait sur l'abscisse et l'ordonnée : le demi-segment inférieur *APN* étant égal au supérieur *APM*, il s'ensuit que le segment total *MAN* est les deux tiers du parallélogramme circonscrit.

Quadrature de la Cycloïde.

Par le point le plus élevé de la cycloïde menons une parallèle à sa base, qui soit terminée par les perpendiculaires élevées aux extrémités de cette base, on aura un rectangle *ACML* (fig. 2) dont la base sera égale à la circonférence du cercle générateur, et dont la hauteur sera égale au diamètre de ce même cercle ; par conséquent l'aire de ce rectangle sera quadruple de celle du cercle générateur. Cela posé, si par deux points *G* et *H* pris sur la cycloïde, on mène des tangentes à cette courbe, que par les mêmes points on mène des parallèles à la base jusqu'à la rencontre du cercle *DEBD*, et que l'on tire les cordes *DE*, *DF*, elles seront respectivement égales et parallèles à *GK* et *HI* ; par conséquent si les points *G* et *H* sont infiniment près, le triangle élémentaire *IHK* est égal au secteur élémentaire *EDF*; ainsi la somme de tous les triangles élémentaires qui composent l'aire du triangle mixtiligne *ALD* sera égale à celle de tous les petits secteurs élémentaires qui composent le demi-cercle *DEB*. Le triangle mixtiligne *DCM* étant égal au demi-cercle *DNB*, il en résulte que les deux triangles mixtilignes *ALD*, *CMD*, équivalent au cercle *DEBND* ; si on les retranche du rectangle *ACML*, qui est quadruple du cercle *DEBND*, il restera, pour l'aire de la cycloïde, le triple de l'aire du cercle générateur.

Quadrature de la Logarithmique.

Soient *M* et *m* (fig. 3) deux points de cette courbe que nous supposerons infiniment près l'un de l'autre ; si par l'un et l'autre de ces points on mène des tangentes à la courbe et des ordonnées à l'axe *PX* qui en est l'asymptote, on aura, en vertu des propriétés de cette courbe $PT = pt$; cela posé, les points *M* et *m* étant infiniment près, le petit arc *Mm* se confond avec la tangente au point *m*. Si par le point *T* on mène *To* parallèle à *mt*, et *TK* parallèle aux ordonnées, on aura un parallélogramme *KToM*, qui sera divisé par la diagonale *MT* en deux, également ; par conséquent le triangle *MTo* est égal au triangle *MTK*, et comme celui-ci ne diffère de *MTt* que du triangle *TtK* qui est infiniment petit par rapport à *MTt*, on aura $MTo = MTt$. Si par un autre point m' infiniment près de *m*, on mène une tangente $m't'$

à la courbe, et que par le point T on lui mène une parallèle To', on aura l'espace $mtt'm'm$ égal au triangle Too', et ainsi de suite ; par conséquent l'espace total compris entre la courbe, l'asymptote et la tangente, est égal à la somme de tous les triangles élémentaires dont se compose le triangle MPT, c'est-à-dire au triangle lui-même ; si à cet espace on ajoute le triangle MPT, on aura pour l'espace total compris entre la courbe, une ordonnée et l'asymptote, un espace double de l'aire du triangle fait sur l'ordonnée et la soutangente, et par conséquent égale au parallélogramme fait sur la sous-tangente et l'ordonnée.

Si on veut avoir la portion de l'aire comprise entre la courbe, deux ordonnées quelconques et la partie de l'asymptote comprise entre ces deux ordonnées, il est facile de voir qu'on l'obtiendra en construisant un parallélogramme qui auroit pour côtés contigus, la soutangente et la différence des ordonnées.

Il est aussi facile de voir que la portion de l'aire terminée par une portion de la courbe, les tangentes menées à ses extrémités et l'asymptote est égale au triangle formé avec les tangentes menées aux extrémités de l'arc et dont l'angle compris seroit celui que ces deux tangentes font entr'elles.

Evaluation d'un segment de paraboloïde.

Par le point le plus éloigné de la base du segment, concevons une droite parallèle à l'axe de révolution, et par un point de cette droite située dans l'intérieur de ce segment et à une distance infiniment petite de la base, concevons un plan qui lui soit parallèle : on aura une tranche infiniment mince, dont le volume se confondra avec le cylindre qui auroit pour base celle du segment, et pour hauteur l'épaisseur de la tranche ; cela posé, si on conçoit un cône dont le sommet soit sur le diamètre AP de l'autre côté de l'origine, à une distance $AT = AP$ (fig. 1), et qui ait même base que le segment de paraboloïde, il sera tangent à la surface de révolution, puisque les intersections du cône, par les plans conduits suivant le diamètre AP, sont tangentes aux paraboles qui sont les intersections de ce même plan avec la surface du paraboloïde. Si on prend ensuite $At = Ap$, le point t sera le sommet d'un cône dont la surface sera le prolongement de la petite zône élémentaire, comprise entre les deux plans infiniment rapprochés, et la différence des cônes qui est la partie du solide comprise entre les deux surfaces coniques, sera égale à la base commune multipliée par le tiers de la différence des hauteurs, et par conséquent sera égale au tiers du petit cylindre élémentaire MP, pm, qui lui correspond dans le

segment de paraboloïde ; ainsi la somme des petits volumes élémentaires compris entre les surfaces coniques infiniment voisines et ayant leur centre sur le diamètre TP, est le tiers de la somme des cylindres élémentaires correspondant dans le segment de paraboloïde ; d'où il résulte que le solide extérieur au segment est contenu trois fois dans ce segment, et par suite quatre fois dans le cône circonscrit : le segment de paraboloïde est donc les trois quarts de ce cône ; et comme ce cône est les deux tiers du cylindre circonscrit à ce segment, puisqu'il a même base et une hauteur double, il en résulte que ce segment de paraboloïde est les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, ou ce qui revient au même la moitié de ce même cylindre.

Si on vouloit avoir le centre de gravité d'un segment de paraboloïde, il faudroit le concevoir décomposé en tranches infiniment minces, d'égale épaisseur, et parallèles à la base : le centre de gravité de chacune d'elles se trouvant sur la droite menée par le sommet du segment parallèlement à l'axe de révolution, le centre de gravité du segment s'y trouvera aussi, et comme les intensités des forces appliquées aux différens points de cette droite varieront dans le rapport des carrés des ordonnées d'une section faite suivant le diamètre, et par conséquent dans le rapport de leur distance au sommet, il s'ensuit que le centre de gravité se trouvera aux deux tiers du diamètre à partir de l'origine, puisque le centre de gravité d'une droite aux différens points de laquelle on applique des forces proportionnelles aux distances de ces mêmes points, à l'une des extrémités, peut être considéré comme le centre de gravité d'un triangle dont la base seroit divisée par une des extrémités en deux parties égales, et dont le sommet seroit placé à l'autre extrémité.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Problème. — Etant donnée une surface de révolution engendrée par une courbe quelconque, et un cône dont la trace sur le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, soit aussi une courbe quelconque, trouver leur intersection en n'employant que la ligne droite et le cercle.

Solution, par M. Olivier, Elève.

On coupe les deux surfaces données par une suite de cônes auxiliaires, qui ont même sommet que le cône donné, et qui

ont pour bases des cercles de la surface de révolution. L'un de ces cônes auxiliaires, prolongé jusqu'au plan de la base du cône donné, a pour trace, sur ce plan, un cercle. Les points d'intersection de ce cercle et de la base du cône donné déterminent des arêtes communes à ce dernier cône et au cône auxiliaire. Une quelconque de ces arêtes passe par un point du cercle qui est à-la-fois sur la surface de révolution, sur le cône auxiliaire, et sur le cône donné; d'où il suit que ce point est sur la courbe d'intersection des deux surfaces données.

Je me propose de déterminer les cônes auxiliaires limites, c'est-à-dire ceux qui passent par les cercles de la surface de révolution, entre lesquels sont comprises les différentes branches de la courbe d'intersection cherchée.

Si la trace du cône auxiliaire ne coupe pas celle de la surface conique donnée, il n'y aura aucun point de la courbe situé sur le cercle appartenant à-la-fois au cône auxiliaire et à la surface de révolution.

Si au contraire ces deux traces se coupent, il y aura sur ce cercle autant de points de la courbe qu'il y aura de points communs aux deux traces.

Les cercles limites seront donc ceux qui ne contiendront qu'un seul point de la courbe; ils seront évidemment placés sur les cônes auxiliaires dont les traces seront tangentes à celle de la surface conique donnée; et ces derniers seront les cônes limites.

Pour déterminer les centres des cercles, traces de ces cônes limites, nous emploierons la construction suivante:

(Pl. 2, fig. *a* et *b*.) Tous les cercles, bases des cônes auxiliaires, ont leurs centres sur la trace horizontale $O'S'$ (fig. *a*), du plan vertical passant par le sommet S,S' des cônes auxiliaires, et par l'axe $O',O\omega$ de la surface de révolution. Si de tous les points de la courbe $ABCD$, trace de la surface conique donnée, on mène des normales à cette courbe, chacune des normales coupera la droite $O'S'$ (fig. *a*) en un point qui est le centre d'un cercle, trace de l'un des cônes auxiliaires. Le rayon de ce cercle étant connu, on le portera sur la normale, à partir du point de la courbe par lequel on a élevé cette normale; l'extrémité de ce rayon appartient à une courbe $mn,m'n'$ (fig. *a*) qui coupe la droite $O'S'$ aux points $F, G, \ldots$, centres des cercles, qui touchent la trace $ABCD$ du cône donné. Ces cercles sont évidemment les bases des cônes auxiliaires limites.

Ayant déterminé les cônes auxiliaires limites, il sera facile de trouver les cercles limites, situés sur la surface de révolution.

Ce problême (proposé cette année 1812, par M. Arago) étant résolu, on appliqueroit utilement cette solution à la détermination des ombres, dans le cas, par exemple, où l'on deman-

deroit l'ombre portée par une courbe donnée sur une surface de révolution, les rayons lumineux partant d'un seul point.

Lorsque ces rayons sont parallèles entr'eux, l'ombre d'une courbe sur une surface de révolution est la ligne d'intersection de cette surface et d'un cylindre qui a pour base la courbe donnée, et dont les arêtes sont parallèles.

Pour trouver cette ligne on coupe les deux surfaces par une suite de cylindres qui ont pour bases des cercles de la surface de révolution, et pour arêtes des droites parallèles aux rayons de la lumière.

C'est ainsi que dans l'épure du *vase* (leçons de M. Hachette, sur les ombres) on détermine l'ombre portée sur ce vase, par le cercle qui termine sa surface. Cette méthode n'est pas particulière aux surfaces de révolution; elle s'appliqueroit avec les mêmes avantages dans le cas où il s'agiroit de trouver l'intersection d'un cône et d'une surface engendrée par une courbe plane, mobile, constante de forme, et dont le plan ne changeroit pas de direction.

QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE,

Proposées au Concours général des Lycées de Paris, année 1812.

MM. Giorgini et Duchayla, élèves admis cette année à l'École Polytechnique, ont remporté, l'un le premier prix de mathématiques, et l'autre le premier prix de physique.

Physique.

Exposer la théorie de la réfraction de la lumière.

Mathématiques. — Question de Géométrie.

Etant donné un quadrilatère *ABCD* (fig. 1, pl. 3), dont les quatre côtés ne sont pas situés dans un même plan, on demande

1°. L'équation de la surface engendrée par le mouvement

d'une droite MN, qui s'appuie sur les deux côtés CB, AD du quadrilatère, de manière que l'on ait la proportion $DN : NA :: CM : MB$.

2°. L'équation d'une seconde surface engendrée par une droite IK, qui s'appuie sur les deux côtés opposés AB, DC du quadrilatère avec la condition $CK : KD :: BI : IA$.

3°. On demande de plus si ces deux surfaces sont différentes ou si elles sont coïncidentes?

Solution de la question de Géométrie,

Par M. Giorgini.

Première solution (analytique).

Suivant les côtés adjacens AB, AD (fig. 1, pl. 3), conduisez le plan des zy; par le côté AB, le plan des zx parallèle au côté opposé CD; enfin, par le côté AD, celui des $y\,x$, parallèle au côté opposé BC, et soient représentées par

$$z=\gamma,\ y=\beta,\ x=\alpha$$

les coordonnées du point C, on aura

$$\text{en } A\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases},\quad \text{en } B\begin{cases}z=\gamma\\ y=0\\ x=0\end{cases},\quad \text{en } D\begin{cases}y=\beta\\ z=0\\ x=0\end{cases}$$

et le cours des côtés du quadrilatère sera représenté par les équations

$$AB.\begin{cases}x=0\\ y=0.\end{cases}\quad AD.\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\quad BC.\begin{cases}z=\gamma\\ y=\dfrac{\beta}{\alpha}x\end{cases}\quad DC.\begin{cases}y=\beta\\ x=\dfrac{\alpha}{\gamma}z\end{cases}$$

Cela posé, si nous supposons $AN=y'$, les équations de la génératrice MN seront de la forme

$$\begin{aligned}x&=B\,z\\ y&=A\,z+y',\end{aligned}$$

et si nous éliminons x, y, z, entre les équations de la géné-

ratrice MN et celles du côté BC, nous aurons, pour exprimer que MN s'appuie constamment sur BC, l'équation de condition

$$(a) \;..\; B\gamma\zeta = \alpha(A\gamma + y').$$

De plus, par hypothèse, l'on a

$$\frac{ND}{NA} = \frac{CM}{MB}, \text{ ou bien } \frac{AD}{AN} = \frac{BC}{BM};$$

au point C, $y = \zeta$, et au point M, $x = \gamma$, $y = A\gamma + y'$, nous aurons donc

$$\frac{BC}{BM} = \frac{\zeta}{A\gamma + y'} = \frac{AD}{AN} = \frac{\zeta}{y'}, \quad \text{ou bien} \quad A\gamma = 0,$$

d'où il résulte, puisque γ n'est pas généralement nul, que $A=0$, et par conséquent que l'équation de condition (a) devient

$$B\gamma\zeta = \alpha y';$$

or, des équations de la génératrice, on tire $B = \frac{x}{z}$ et $y' = y$; l'équation de la surface demandée sera donc

$$(1) \;....\; \gamma\zeta x = \alpha y z.$$

Nous avons ainsi satisfait à la première partie de la question; voici ce qui résout les deux secondes:

Pour avoir l'équation de la surface engendrée par la seconde droite IK, il est clair que les calculs seroient absolument les mêmes, considérant seulement, au lieu des côtés AD, BC, les côtés AB, CD, et par suite changeant ζ et y en γ et z, et réciproquement. Et pour avoir donc l'équation de la seconde surface, il suffira de faire ces changemens dans l'équation de la première; or, l'équation (1) est symétrique par rapport à ζ et γ, et par rapport à y et z: cette équation est donc également celle des deux surfaces: ces deux surfaces n'en font donc qu'une, et sont coïncidentes.

Discussion.

Reprenons l'équation de la surface $\gamma\zeta x = \alpha y z$, et cherchons les sections de cette surface par un plan, 1°. parallèle à celui des y, x; 2°. parallèle à celui des z, x. Le premier ayant

pour équation $z = k$, nous donne pour section la droite

$$z = k, \; \gamma \beta x = \alpha k y,$$

le second ayant pour équation $y = k$, la section qu'il fera sur la surface, sera la droite

$$y = k, \; \gamma \beta x = \alpha k z.$$

D'où il résulte que notre surface peut être engendrée de deux manières différentes par une droite, qui se meut s'appuyant sur deux autres, et assujettie à être constamment parallèle à un même plan; nous sommes donc en droit de conclure que cette surface est un *paraboloïde hyperbolique.*

Quant aux sections de la surface par des plans parallèles à celui des y, z, c'est-à-dire à celui des deux côtés AB, AD, il est clair que l'équation de l'un de ces plans étant généralement $x = c$, celles de la section seront

$$x = c, \; \alpha y z = \gamma \beta c,$$

d'où il résulte que ces sections sont des hyperboles rapportées à leurs asymptotes, et que, par conséquent, les plans des x, z, et celui des x, y, sont des plans asymptotiques de la surface; on aura donc un système de plans asymptotiques, en conduisant, suivant deux côtés adjacens, des plans parallèles aux côtés qui leur sont respectivement opposés.

Supposons actuellement qu'au lieu de prendre le point α, β, γ, pour l'un des sommets du quadrilatère, l'on prenne un autre point placé sur la surface d'une manière quelconque, c'est-à-dire, tel que α', β', γ', étant ses cordonnées, l'on ait la relation

$$\alpha \beta' \gamma' = \gamma \beta \alpha';$$

alors, considérant la surface engendrée d'après le même mode de génération, en faisant usage de ce second quadrilatère, son équation sera

$$\gamma' \beta' x = \alpha' y z,$$

et cette seconde surface aura, pour plans asymptotiques, ceux menés suivant les côtés du quadrilatère qui passent par le point α', β', γ', parallèlement aux côtés opposés, c'est-à-dire, aux plans des x, y et des x, z : or, puisque

$$\beta' \gamma' = \frac{\gamma \beta \alpha'}{\alpha}$$

l'équation de la seconde surface devient

$$y \, 6 \, x = \alpha \, y \, z;$$

c'est-à-dire, que cette seconde surface est la même que la première, et que, par suite, tous les systêmes de plans menés suivant deux génératrices de la surface parallèlement aux deux côtés opposés du quadrilatère, seront un systême de plans asymptotiques.

Nous avons démontré que la génération de notre surface étoit la même que la génération du paraboloïde hyperbolique; il s'ensuit donc de nos dernières considérations le théorême suivant :

Que tout paraboloïde hyperbolique admet une infinité de plans asymptotiques, qui rencontrent chacun la surface suivant l'une de ses génératrices, et sont respectivement parallèles aux plans directeurs auxquels chaque génératrice est parallèle.

Deuxième solution (géométrique).

Tous les résultats obtenus précédemment par l'analyse peuvent également se démontrer par de simples considérations de triangles, comme nous allons le faire voir.

Concevons pour cela que, conservant la même disposition d'axes que précédemment, on conduise, suivant les deux côtés *CB, CD* (fig. 2), un plan, dont *DR, BR* soient les traces sur les deux plans des y, x et dès z, x; le plan des y, x étant parallèle au côté *CB*, la trace *DR* sera parallèle à ce côté; par la même raison, *BR* sera parallèle à *CD*, et la figure *CDRB* sera un parallélogramme. Si donc on mène dans le plan de ce parallélogramme, la ligne *ME* parallèle à *BR*, on aura $CM = DE$, $MB = ER$, et par conséquent $DN : NA :: DE : ER$. D'où il résulte que la ligne *NE* est parallèle à *AR*, et le plan *MEN* parallèle au plan *BRA* ou à celui des z, x; la génératrice *MN*, située dans le plan *MEN*, sera donc constamment parallèle au plan des z, x; d'où il résulte d'abord que la surface demandée est un paraboloïde hyperbolique.

Cherchons actuellement l'équation de la surface, et, pour cela, considérons un point quelconque *G* (fig. 2), situé sur la génératrice *MN*; soient z, x, y, les trois coordonnées *GP, PN, NA* de ce point; *CS, SD, DA*, celles du point *C*; *ML, LN, NA*, celles du point *M*, nous aurons

$$\frac{ML}{GP} = \frac{LN}{PN}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\gamma}{z} = \frac{LN}{x}, \quad \frac{LN}{SD} = \frac{NA}{DA},$$

d'où l'on tire

$$LN = \frac{SD.NA}{DA} = \frac{\alpha y}{\beta};$$

et par suite, substituant, nous aurons

$$\beta y x = \alpha y z$$

pour l'équation de la surface demandée : ce résultat est conforme à celui que nous avions obtenu précédemment.

La coïncidence des deux surfaces peut également se démontrer sans faire usage d'aucune équation.

En effet, conservons la même construction que précédemment, et de plus, conduisons dans le plan du parallélogramme, KF parallèle à CB, IF sera parallèle à AR, par la même raison que NE est parallèle à AR; les deux plans KFI, MEN, respectivement parallèles à ceux des y, x et des z, x, se couperont suivant une certaine droite GH, parallèle à IF, NE et AR. Si donc nous parvenons à démontrer que le point où GH rencontre la génératrice MN, est le même que celui où GH rencontre KI, il sera démontré que les génératrices KI et MN se rencontrent en un même point, et que, par conséquent, une génératrice quelconque de l'une des deux surfaces rencontre toutes celles de la seconde surface, y est située, et que les deux surfaces sont coïncidentes.

Or, si nous regardons le point G comme celui où GH rencontre MN, les triangles MGH, MNE semblables, donneront

$$GH = \frac{NE \times MH}{ME},$$

or, $MH = CK$, $ME = CD$, et les triangles DNE, DAR semblables, donnent

$$NE = \frac{DN \times AR}{DA};$$

nous aurons donc

$$GH = \frac{DN.\ CK.\ AR}{CD.\ DA}.$$

Supposons actuellement que le point G soit celui d'intersection de la droite GH avec KI, nous aurons dans les triangles KGH, KIF semblables.

$$GH = \frac{IF.KH}{KF} = \frac{IF.DE}{DR} = \frac{IF.DN}{DA},$$

et dans les triangles *BIF*, *BAR*

$$IF = \frac{BI.AR}{BA} = \frac{CK.AR}{CD},$$

er par suite

$$GH = \frac{DN.CK.AR}{DA.CD}.$$

D'où il résulte que, à partir du point *H*, la ligne *GH* est rencontrée à la même distance par la ligne *KI* et par la ligne *MN*; et que par suite, ces deux génératrices se rencontrent au même point *G*, ce qu'il falloit démontrer (*).

(*) M. Monge, après avoir donné quelques momens à l'examen de cette question, avoit trouvé une solution qui ne diffère de celle de M. Giorgini, que par la manière dont elle est présentée. Il suppose qu'étant donné un quadrilatère gauche, c'est-à-dire dont les quatre côtés ne sont pas dans le même plan, on le divise en deux triangles par une diagonale; il considère ces deux triangles comme les moitiés de deux parallélogrammes, et ces deux parallélogrammes comme les sections faites dans un parallélipipède par deux plans qui ont pour intersection commune la première diagonale du quadrilatère donné. La seconde diagonale de ce quadrilatère le divise encore en deux triangles, dont chacun est moitié de deux autres parallèlogrammes, et on fait voir que les quatre parallélogrammes sont des sections d'un parallélipipède, dont les plans passent deux à deux par la même diagonale du quadrilatère. On obtiendroit ce même parallélipipède, en menant par les côtés opposés du quadrilatère, des plans parallèles à ces côtés : deux de ces plans seroient nécessairement parallèles entre eux, et contiendroient les faces parallèles du parallélipipède.

Soit (fig. 3, pl. 3) *ABCD* le quadrilatère donné. (Pour faciliter la comparaison de la fig. 3 aux figures précédentes 1, 2, de M. Giorgini, on désigne par les mêmes lettres, les points communs à ces trois figures.)

Ayant mené les diagonales *AC* et *BD*, on construit 1°. les parallélogrammes *ABCS*, *ACDd*, dont les plans passent par

THÉORÊME DE GÉOMÉTRIE,

Par M. Chasles, Elève.

Si on divise deux côtés opposés (fig. 1, pl. 3) AB, CD, d'un quadrilatère gauche $ABCD$ en des points I et K, tels qu'on ait $\frac{AI}{BI}=a.\frac{DK}{CK}$, a étant un nombre donné; la droite IK engendrera la surface du second degré qu'on nomme *hyperboloïde à une nappe.*

Démonstration. — Je mène une droite MN, qui divise les

---

la diagonale AC; 2°. les parallélogrammes $ABDa$, $BCDR$, dont les plans passent par la diagonale BD. Ces quatre parallélogrammes sont des sections d'un parallélipipède XY, $X'Y'$. La direction des arêtes du parallélipipède est déterminée par les droites telles que AR, aC ou Bd, DS qui joignent les sommets de deux parallélogrammes dont les plans passent par la même diagonale du quadrilatère. Les plans des triangles KIF ou KGH, MNE ou MGH, sont parallèles aux arêtes du parallélipipède, et coupent les faces de ce solide suivant des droites parallèles à ses arêtes.

Considérant à-la-fois le prisme et les quatre parallélogrammes, dont les plans passent par les diagonales BD, AC, on voit que les plans des triangles KIF, MNE, contiennent deux autres triangles KIk, MNm, dont les plans se coupent suivant une droite GH' parallèle aux arêtes du parallélipipède.

La comparaison des triangles IKk, IGH', donneroit pour GH' une valeur qui ne différeroit pas de celle qu'on trouveroit en comparant les triangles NMm, NGH'; d'où l'on déduiroit, par un raisonnement semblable à celui de M. Giorgini, que les deux droites KI, MN se coupent en un point G. (*Voyez une autre démonstration de ce théorême, Géométrie de M. Legendre, neuvième édition, page* 147, *proposition XVI.*)

Les plans $KIFk$, $MNEm$ coupant la diagonale BD aux points z et z', les droites KF, Ik, se croisent au point z, et les droites ME, Nm, au point z'. (*Fin de la note.*)

côtés opposés *AD*, *BC*, en des points *N*, *M*, de manière qu'on ait $\frac{AN}{DN} = a . \frac{BM}{CM}$, les deux droites *LK*, *MN*, se couperont en un point *G*, car si on élimine *a* entre les deux équations précédentes, on obtiendra

$$AI \times BM \times CK \times DN = AN \times DK \times CM \times BI ;$$

ce qui prouve (*Théorie des Transversales*, par M. Carnot, page 70) que les quatre points *I*, *K*, *M*, *N*, sont sur un même plan. Ainsi les deux droites *IK*, *MN*, se couperont en un point *G*. D'après cela, si on suppose *MN* fixe, la droite *IK* s'appuiera constamment sur les droites *AB*, *CD*, *MN*; donc elle engendrera une surface du second degré. Mais la droite *MN* n'est pas située dans un plan parallèle aux deux droites *AB*, *CD*, puisque sa position, à partir du point *M*, dépend de la constante donnée *a*; donc cette surface du second degré est un hyperboloïde à une nappe.

Faisant mouvoir la droite *MN*, elle engendrera un second hyperboloïde qui se confondra avec le premier, puisqu'une droite *IK* de l'un coupe toutes les génératrices *MN* de l'autre.

Lorsque $a = 1$, l'hyperboloïde devient un paraboloïde hyperbolique.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Du Dessin de la Vis triangulaire, éclairée par des rayons de lumière qu'on suppose parallèles entr'eux.

Suite de l'article (page 13 de ce volume) *Application de la théorie des Ombres au dessin des Machines*, par M. Hachette.

Dans l'article cité, page 13 de ce volume, on a eu principalement pour objet de discuter la courbe de séparation d'ombre et de lumière sur les filets d'une vis triangulaire. Pour compléter l'explication du dessin de cette vis, nous aurons égard aux parties accessoires, telles que la tête de la vis, un écrou...; nous supposerons la forme de la vis, déterminée par les projections horizontale et verticale de l'épure *A* (pl. 4). Nous indiquerons, par une légende, les données de cette épure, et les lignes à construire. Parmi ces lignes, on distinguera les courbes limites de la projection verticale des surfaces supérieure et inférieure des filets, et les lignes de séparation d'ombre et de lumière. Nous

construirons ces courbes par la considération du paraboloïde hyperbolique tangent à la surface du filet. Quant aux autres lignes, qu'on trouve par l'application des méthodes connues, on se contentera d'indiquer, dans la légende, les surfaces dont elles sont les intersections.

Explication de l'Epure A (pl. 4).

Les données de cette Epure sont. 1°. un cercle (fig. 1) du rayon *AB*, projection horizontale du noyau de la vis qu'on suppose vertical; 2°. un cercle du rayon *AC*, base du cylindre qui contient l'hélice commune aux surfaces supérieure et inférieure des filets; 3°. un cercle du rayon *AD*, projection horizontale de la tête de la vis, dont la hauteur est $\alpha\beta$, ou $\gamma\delta$ (fig. 2); 4°. la droite génératrice *CB* (fig. 1), *cb* (fig. 2) de la surface supérieure des filets de la vis. Cette droite prolongée coupe l'axe du noyau de la vis au point *A* (fig. 1), *a* (fig. 2), et fait avec cet axe un angle constant *caa'*. La droite génératrice de la surface inférieure des filets, menée par le point *c* (fig. 2), feroit avec l'axe vertical *aa'*, un angle égal au premier *caa'*; le sommet de cet angle seroit au-dessous de l'horizontale *ca'*, et à une distance de cette horizontale égale à la verticale *aa'*; 5°. enfin l'écrou compris entre les deux plans horizontaux $\iota\zeta$, $\eta\theta$.

D'après ces données, on demande d'abord *le contour de la projection verticale des filets de la vis*. Un plan vertical tel que *AB* (fig. 1), parallèle au plan vertical de projection (fig. 2), couperoit les filets de la vis suivant un système de lignes droites parallèles aux génératrices de ces filets; mais les projections verticales de ces droites ne forment pas le contour de la projection verticale des filets. Pour obtenir la ligne limite de cette projection, il faut concevoir les surfaces supérieure et inférieure des filets de la vis, enveloppées par deux cylindres dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de projection. L'intersection de ces cylindres, par le plan vertical de projection, est la ligne demandée. Si l'on observe que cette ligne doit être tangente aux projections verticales de toutes les hélices, on en conclura qu'elle est nécessairement courbe; car, si elle étoit droite, elle couperoit l'axe du noyau de la vis; ce qui est impossible, puisqu'elle doit toucher cet axe qui peut être considéré comme une hélice de la surface de la vis, tracée sur un cylindre dont la base est réduite à zéro.

Pour tracer la courbe limite de la projection verticale des filets de la vis, reprenons la planche 2 du premier cahier de ce volume, qu'on a réimprimée pour ce 5°. cahier. Soient *AB'*, *ab'* (planche 2, cahiers 2°. et 5°.), les projections horizontale et verticale de la génératrice de la surface supérieure du filet.

Nous avons démontré (supplément de la géométrie descriptive, art. 61, pag. 62), 1°. que cette surface étoit l'enveloppe de l'espace que parcourt une paraboloïde hyperbolique de forme constante ; 2°. que la droite génératrice de ce paraboloïde avoit pour directrices les tangentes à trois hélices, parallèles au plan vertical tel que $B'N$, perpendiculaire à la projection horizontale $A\,B'$ de la droite commune à la surface du filet et au paraboloïde. Considérant l'axe $A,A'a$, comme l'un des tangentes directrices, soient $B'N$, $\alpha\beta$ les projections horizontales des deux autres tangentes. Connoissant le pas de l'hélice décrite par un point quelconque de la génératrice $A\,B'$, ab', on trouve facilement l'angle que les tangentes font avec le plan horizontal, et tout ce qui est relatif au premier mode de génération du paraboloïde, est bien connu. Déterminons maintenant le second mode de génération. Tout plan vertical, tel que $A\beta N$, passant par l'axe $A,A'a$, contiendra une droite du paraboloïde, appartenant au premier mode de génération. Nommons cette droite D. La droite D passera par les deux points, dont N et β, extrémités des droites $B'N$, $\alpha\beta$, sont les projections horizontales; or, la différence des ordonnées verticales de ces deux points est égale à la différence des ordonnées verticales, qui correspondent aux deux points B', α; d'où il suit que la droite D, dont la projection horizontale est AN, se projettera sur le plan vertical, suivant une droite telle que nD, parallèle à $b'a$. Quelle que soit la position de la génératrice du paraboloïde, dans le premier mode de génération, pour lequel les trois directrices sont parallèles au plan vertical $B'N$, cette génératrice se projettera sur le plan vertical suivant une parallèle à la droite ab', et sur le plan horizontal, suivant une droite passant par le point A; d'où il suit que dans le second mode de génération, la droite génératrice est constamment parallèle au plan vertical $B'N$, et les trois directrices sont parallèles à un plan qui auroit pour trace sur le plan vertical la droite ab', et qui seroit perpendiculaire à ce plan vertical. Les deux plans auxquels la génératrice du paraboloïde est parallèle dans les deux systêmes de génération, ayant pour intersection une droite horizontale, tout plan horizontal coupe ce paraboloïde suivant une parabole (*Supplément de la Géométrie descriptive*, art. 83, pag. 73).

Connoissant la double génération du paraboloïde qui touche la surface du filet suivant une droite donnée, on trouvera, de la manière suivante, un point de la courbe qui termine la projection verticale de cette surface. On portera sur $B'N$, perpendiculaire à AB', le développement d'une portion de la circonférence du rayon AB', par exemple, moitié de cette circonférence, et on joindra les points N et A par une droite. Portant au-dessous

du point N une ordonnée verticale, égale à la moitié du pas de l'hélice décrite par le point (B', b'), l'extrémité de cette ordonnée sera un point de la droite qui touche l'hélice au point (B', b'). Prenant sur la verticale $b'B'$, une droite $b'n$, égale à la moitié du pas de l'hélice, le point n sera la projection verticale du point N. Menant la parallèle nD à $b'a$, les droites nD, AN sont les projections verticale et horizontale d'une génératrice du paraboloïde qui touche la surface du filet suivant la droite AB', ab' de cette surface.

Soient $A\delta$, $t\delta'$, les projections horizontale et verticale d'une droite quelconque de la surface du filet; concevons par cette droite un paraboloïde égal à celui qui touche la surface du filet suivant la droite AB', ab', et un plan perpendiculaire au plan vertical. Le point où ce plan, dont la trace horizontale est δd, touche le paraboloïde, appartient à la courbe cherchée. La droite $A\delta$, et l'horizontale δd, qui se projette sur le plan vertical en δ', faisant entr'elles l'angle $A\delta d$, supposons que ces droites tournent autour du point A, et viennent coïncider l'une avec AB', l'autre avec la droite $B'e$, qui coupe la ligne AN au point e. Par ce mouvement, l'horizontale δd, δ', prend la position d'une autre horizontale, qui se projette en $B'e$, $b'e'$. Le plan qui passe par cette dernière horizontale et par la droite AB', ab', touche le paraboloïde tangent à la surface du filet suivant cette même droite, en un point qu'il s'agit de déterminer. Pour construire ce point, observons que le plan vertical AN coupe la droite de la surface du filet au point A, a, et l'horizontale $B'e$, $b'e'$, au point e, e'. Or, la droite ae' coupe la droite nD au point λ; donc la parallèle $\lambda\varphi\lambda'$ à $b'n$, ou à $A'a$, coupera les droites AB', ab', en des points λ', φ, qui seront les projections horizontale et verticale du point de contact cherché.

Décrivant du point A, comme centre, l'arc $\lambda'\gamma$, qui coupe la droite $A\delta$ au point γ, et menant la verticale $\gamma\epsilon$ qui rencontre la droite $\delta' t$, au point ϵ, les points γ et ϵ sont les projections horizontale et verticale d'un point de la courbe cherchée. On trouvera, de la même manière, tant de points qu'on voudra, de la ligne $\epsilon\mu\epsilon'$, qui termine la projection verticale de la surface du filet.

Le plan tangent à la surface du filet, qui a pour trace sur le plan vertical, la droite $\delta'\epsilon t$, étant perpendiculaire à ce plan vertical, il suit que cette droite touche la courbe $\epsilon\mu\epsilon'$ au point ϵ.

En considérant toutes les nappes de la surface du filet qui ont pour lignes de *striction* l'axe vertical A, $A'a$, la limite de la projection verticale de la portion de cette surface, qui correspond à une révolution entière de la droite génératrice, est une

courbe composée de deux branches infinies $\iota\mu\iota'$, $\pi\mu'\pi'$, tangentes à la droite $A'a$ aux points μ et μ'. La distance $\mu\mu'$ de ces deux points est égale à la moitié du pas de l'hélice, décrite par un point quelconque de la droite qui engendre la surface du filet. Elle a pour asymptote les deux droites $b'a$, $b''a'$, projections verticales des génératrices du filet, dont les projections horizontales AB', AB sont contenues dans un plan vertical BB', parallèle au plan vertical de projection. D'où il suit que ces deux asymptotes coupent l'axe $A'a$ en deux points a, a', dont la distance aa' est égale à $\mu\mu'$.

Le cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan vertical BB', touche la surface du filet prolongée indéfiniment, suivant une infinité de courbes, qui se projettent sur le plan vertical suivant des lignes composées de deux branches égales aux courbes $\iota\mu\iota'$, $\pi\mu'\pi'$, et toutes ces lignes de contact se projettent sur le plan horizontal, suivant une courbe unique, composée de deux branches FAH, LAK, qui se touchent au point A, et qui sont touchées par la droite AA', perpendiculaire au plan de la projection verticale. La branche FAH coupe le cercle du rayon AB' au point F. La verticale FF' coupe la projection verticale de l'hélice décrite par le point (B', b') en un point F' de la ligne $F'\iota\mu\iota'$. La même branche FAH coupe au point O, la tangente $B'N$ du cercle dont le rayon est AB', et à ce point O correspond en projection verticale un point O' (au-dessous de F') de la courbe $O'F'\iota\mu\iota'$. Pour éviter la confusion qui résulte du voisinage des trois points b', F', O' (fig. 2, projection verticale), on a construit à part, sur une plus grande échelle, la fig. 3 qui montre la position respective de ces trois points; le premier b', sur la droite $b'a$; le second F', au contact de la projection verticale $F'N'$ de l'hélice et de la limite $F'\iota$ de la projection verticale du filet; le troisième O', sur la courbe limite $F'\iota$, qui a pour asymptote la droite ab', prolongée indéfiniment.

Examinons maintenant quelle doit être, d'après les données de l'épure A (pl. 4), la limite de la projection verticale (fig. 2) des surfaces supérieure et inférieure d'un filet, vers les angles (saillant et rentrant) des génératrices qui se croisent aux points c et c'. Vers l'angle saillant c (fig. 2 et 3), on distinguera les deux courbes $g'e$, ge', touchées par la projection verticale $dece'd'$ de l'hélice aux points e et e'. Ces deux courbes $g'e$, ge', se construisent comme la ligne $F'\iota\mu$ (fig. 2 et 3, pl. 2 des cahiers 1 et 5).

Vers l'angle rentrant c' (fig. 2 et 4), les deux courbes $g''e''$, $g'''c''$, se croisent en un point c'', situé sur l'horizontale $c'c''$, à la droite du point c', intersection de l'horizontale $c'c''$, et de la projection verticale $d'''c'd''$ de l'hélice arête des deux surfaces d'un filet.

De la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur les filets de la vis triangulaire.

On peut construire cette ligne par les méthodes décrites pages 13 et 69 de ce volume; ou par la méthode plus simple, qu'on vient d'employer pour trouver (pl. 2, cahiers 2 et 5) la limite de la projection verticale du filet de la vis, et qui consiste à regarder la surface du filet comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un paraboloïde du second degré, de forme constante.

Soient (pl. 4) *CA*, *ca*, les deux projections de la droite génératrice de la surface supérieure du filet; *AE*, *aE'*, les deux projections d'une parallèle aux rayons de lumière, menée par le point (*A*,*a*), où la droite génératrice coupe l'axe vertical *A*,*a'a*.

Le plan vertical *AEI* touche la surface du filet en un point situé sur l'axe *A*,*a'a*, et *v* est la projection verticale de ce point. La distance *av* du point *a* au point *v*, est à la hauteur totale du pas de la vis dans le rapport de l'arc *CSI* du rayon *AC*, à la circonférence entière du même rayon. La droite mobile *AC*, *ac*, génératrice de la surface du filet, transportée dans le plan vertical *EAI*, coupe l'axe *A*, *a'a* au point *A*,*v*. Continuant à tourner autour de cet axe, il revient dans le plan vertical *AE*, et coupe l'axe au point *A*,*μ*; la distance du point *μ* au point *v* est égale à un demi pas de la vis.

Considérant ensuite la génératrice dans une position quelconque, par cette génératrice et par une parallèle aux rayons de lumière, on menera un plan qui touchera le paraboloïde correspondant à la position donnée de la génératrice en un point, et ce point appartiendra à la ligne de séparation d'ombre et de lumière, dans l'hypothèse où les rayons de lumière sont parallèles entr'eux. La ligne qui est le lieu de tous ces points, a pour projection horizontale une courbe à deux branches *STAQR*, *MNAOP*. Ces deux branches sont touchées par la même droite *EAI* au point *A*, et elles ont pour diamètre commun la perpendiculaire à cette droite élevée par le même point *A*.

Les droites qui engendrent les deux surfaces du filet, étant également inclinées par rapport à l'axe de la vis, la surface inférieure peut être considérée comme le prolongement de la surface supérieure. D'où il suit que la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface inférieure, a aussi pour projection horizontale la courbe des branches *STAQR*, *MNAOP*. Les portions utiles de ces deux branches sont *ST*, *MN*, pour la surface supérieure, *QR* et *OP* pour la surface inférieure. Elles sont comprises entre les deux cercles des rayons *AC*, *AB*.

à la portion ST, correspond en projection verticale la portion st de la courbe $stvqr$; à la projection horizontale de la courbe $STAQR$, correspondent autant de courbes telles que $stvqr$ en projection verticale, qu'il y a de tours de filets sur la vis.

Dans l'épure A, la courbe st a été tracée sur trois filets en st, $s't'$, $s''t''$.

La courbe mn, qui correspond à MN, a été transportée en $m''n''$, et $m'n'$.

Les verticales Rr, Qq, comprennent les courbes égales qr, $q'r'$, $q''r''$, qui ont pour projections horizontales la portion de courbe QR. De même les verticales Oo, Pp, comprennent les courbes égales op, $o'p'$, $o''p''$, qui ont pour projections horizontales la portion de courbe OP. Ces dernières courbes, tant en projection horizontale qu'en projection verticale, appartiennent à la surface inférieure des filets.

Pour tracer exactement les portions ST, MN, RQ, PO, de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, on déterminera la position de la génératrice sur laquelle se trouve le point de cette projection, située à l'infini. Pour trouver cette position, on menera par le point A,a, où la génératrice, dans sa première position AC, ac, coupe l'axe de la vis, un parallèle au rayon de lumière, cette parallèle rencontre le plan horizontal $ca'E''$ au point I'. Menant par ce point I' une tangente au cercle décrit du point A comme centre avec le rayon AC, les droites menées du point A aux points de tangence seront les projections horizontales des génératrices de la surface du filet, sur lesquelles se trouvent les points de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, situés à l'infini.

En effet, ces tangentes menées par le point I' au cercle du rayon AC, seront les traces des plans tangens aux paraboloïdes qui touchent les surfaces du filet; or, ces traces étant perpendiculaires aux projections horizontales des génératrices par lesquelles passent les paraboloïdes tangens (1), les plans tangens sont parallèles aux droites génératrices des paraboloïdes dans le second système de génération; d'où il suit que les points de tangence seront situés à l'infini.

Après avoir construit les lignes de séparation d'ombre et de lumière, on tracera les contours des ombres portées par ces lignes ou par les parties qui composent une vis, sur les filets de cette vis. La légende suivante indique les lignes données de l'épure A, les lignes à construire, et les courbes qui terminent les ombres portées sur les diverses parties de la vis.

(1) C'est ainsi que dans la fig. 2, pl. 2, cahiers 1 et 5, la trace B^bN est perpendiculaire à $B'A$.

Légende du dessin de la vis triangulaire, Epure A (pl. 4).

Lignes données.

Projection horizontale (fig. 1).	*Projection verticale* (fig. 2).
AB, rayon du cercle qui sert de base au noyau de la vis.	*αβγδ*, tête de la vis.
AC, rayon de la circonférence, projection de l'hélice, arête du filet.	*εζηθ*, écrou.
AD, rayon du cercle qui sert de base à la tête de la vis.	*λλ'*, intersection des plans horizontal et vertical.
ABC, projection de la droite génératrice du filet.	*abc*, projection de la droite génératrice du filet.
E, projection du rayon de lumière.	*E'*, projection du rayon de lumière.

Lignes à construire.

1°. *Bρπς*, intersection du filet de la vis par le plan horizontal *εζ* de l'écrou.

2° *FGAHKL* (fig. 1), courbe de contact des surfaces supérieure et inférieure d'un filet de la vis, et du cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan vertical ;

3°. La ligne de séparation d'ombre et de lumière sur les filets ;

4°. Ombre portée par la surface inférieure d'un filet sur la surface supérieure du filet immédiatement au-dessous ;

5°. Ombre portée par l'hélice arête d'un premier filet sur les surfaces supérieures des filets situés au-dessous du premier ;

6°. Ombres portées par les surfaces des filets, et par l'hélice intersection de ces surfaces, sur le plan horizontal *εζ* de l'écrou.

De ces six courbes, on connoît, d'après ce qui vient d'être dit, la manière de construire les trois premières ; pour trouver les trois autres, il faut se rappeler qu'on obtient l'ombre que porte

une courbe quelconque éclairée, sur une surface engendrée par une ligne droite, en menant par les droites de cette surface, une suite de plans parallèles aux rayons de lumière, qui coupent en lignes droites, le cylindre dont les arêtes sont parallèles à ces rayons, et qui a pour base la courbe éclairée. Lorsque cette courbe est à double courbure, on substitue à cette base une section plane du cylindre.

Pour construire les lignes de l'épure *A*, que nous allons indiquer par le supplément de la légende, les trois cylindres qui ont pour bases la ligne de séparation d'ombre et de lumière, l'hélice arête des filets, et le cercle qui termine la tête de la vis, ont été coupés par le plan horizontal $\iota\zeta$ (fig. 2), de l'écrou.

En faisant varier les projections *E*, *E'*, du rayon de lumière, la forme des ombres sur la vis, variera; mais pour que la solution de ce problême, relatif au dessin de la vis, soit complète, il faut éviter de donner aux rayons de lumière une direction telle que l'hélice arête des filets, mette dans l'ombre la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur les surfaces des filets.

Suite de la Légende.

CONTOURS DES OMBRES PORTÉES.

	Projection horizontale.	Projection verticale.
1°. Ombre portée par le cercle $\beta\delta$ de la tête de la vis sur le filet au-dessous de ce cercle..........	UVX.	$uv'x$.
2°. Ombre portée par la courbe $PO,p'o'$, sur le filet au-dessous....................................	OY.	$o'y$.
3°. Ombre portée par la courbe $RQ,r'q'$, sur le filet au-dessous....................................	QZ.	$q'z$.
(Cette courbe s'arrête au point Z,z de la courbe $TZS,c''zs''$, séparation d'ombre et de lumière.)		
4°. Ombre portée par la courbe $P\tau,p''\tau'$, sur le plan horizontal $\iota\zeta$....................................	$\tau\varphi$.	$\iota\zeta$.
5°. Ombre portée par l'hélice $PM,p''m''$, sur le même plan....................................	$\varphi\psi$.	*Id.*
6°. Ombre portée par la courbe $MY,m''y$, sur le même plan....................................	$\psi\omega$.	$\iota\zeta$.

	Projection horizontale.	Projection verticale.
7°. Ombre portée par la courbe $PO,p'o'$, sur le même plan........................	01.	*Id.*
8°. Ombre portée par l'hélice $PM,p'm'$, sur le même plan........................	12.	*Id.*
9°. Ombre portée par la courbe $MU,m'u$, sur le même plan........................	23.	*Id.*
10°. Ombre portée par le cercle inférieur de la tête de la vis........................	34.	*Id.*
11°. Ombre portée par la courbe $Ql,q''l'$, sur la surface supérieure du filet au-dessous de cette courbe........................	$Q5$.	$q''5'$.
12°. Ombre portée par la courbe $lR,l'r''$, sur le plan horizontal $\iota\zeta$........................	$5i$.	$\iota\zeta$.
(i est un point très-près de 5 ; la courbe $5i$ est prolongée en i'.)		
13°. Ombre portée par l'hélice $RS,r''s''$, sur le plan horizontal $\iota\zeta$........................	$i56$.	*Id.*
14°. Ombre portée par la courbe ZS,zs'', sur le même plan........................	67.	*Id.*
15°. Ombre portée par la courbe $kR,k'r'$, sur le même plan........................	78.	*Id.*
16°. Ombre portée par l'hélice $RX,r'x$, sur le même plan........................	89.	*Id.*
17°. Séparation d'ombre et de lumière sur la tête de la vis........................	10 et 11.	(10) et (11).

Remarque sur la courbe $\pi\varsigma B\rho\pi$ (fig. 1), intersection des filets de la vis par le plan horizontal supérieur de l'écrou $\iota\zeta$ (fig. 2).

Cette intersection est composée de deux branches qui se croisent aux points π et B ; l'une $\pi\varsigma B$ appartient à la surface supérieure du filet, et l'autre $B\varsigma\pi$ à la surface inférieure. En rapportant les points de cette courbe au point A, comme pôle, on trouvera facilement la loi du décroissement des rayons vecteurs qui partent de ce point. C'est par cette méthode que M. Girard a construit les points de la ligne $\pi\varsigma B\rho\pi$ (fig. 1).

§. II.

SCIENCES PHYSIQUES.

Extrait de plusieurs Mémoires sur le Diamant ;

Par M. Guyton-de-Morveau.

Le premier de ces mémoires, lu à l'Institut le 14 juin 1799, a pour titre :

Extrait du procès-verbal des expériences faites à l'Ecole Polytechnique, dans les années 1797 *et* 1798, *sur la combustion du diamant.* Il résultoit de ces expériences,

1°. Que le produit de la combustion du diamant, ou de sa combinaison avec l'oxigène jusqu'à saturation, est de l'acide carbonique sans résidu ; que ce diamant est le carbone pur, la base acidifiable de l'acide carbonique ;

2°. Que le diamant brûle à une température à-peu-près égale à celle qui fond l'argent ;

3°. Qu'un diamant isolé ne brûle pas assez rapidement, dans le gaz oxigène, pour entretenir la température que sa combinaison avec ce gaz exige ;

4°. Que cette combustion se fait en deux temps ; le diamant noircit à sa surface, avant de se convertir en acide carbonique.

M. Guyton a bien voulu ne pas laisser ignorer qu'il avoit eu pour coopérateurs de ces expériences, MM. Hachette et Desorme. Ce premier mémoire est terminé par des rapprochemens très-ingénieux, qui résultent de la comparaison de la plombagine, de l'anthracite, du charbon et du diamant.

Le second mémoire de M. Guyton, lu à l'Institut le 13 août 1799, a pour titre : *Procès-verbal de la conversion du fer doux en acier fondu par le diamant.*

Pour confirmer l'identité du diamant et du carbone pur, M. Hachette avoit proposé à ses amis, MM. Clouet et Welter, de convertir le fer en acier par le diamant ; il fit la demande à M. Guyton de l'un des diamans de l'Ecole pour cet usage ; ce

célèbre chimiste n'a pas hésité de l'accorder, persuadé que, s'il disparoissoit dans cette opération, par la seule exposition à une haute température, en contact avec le fer, sans accession de l'air ni d'aucun autre oxigénant, le fait acquis ne laisseroit aucun regret de l'avoir sacrifié.

M. Clouet avoit préparé lui-même un petit creuset de fer doux, forgé exprès avec des clous d'épingles choisis. Sa forme étoit un solide à huit pans; il fermoit par un bouchon du même fer, bien ajusté. Ce creuset devoit être placé dans un creuset de Hesse, garni de son couvercle bien luté. Voilà tout l'appareil de l'expérience dont M. Guyton a fait connoître le résultat par la lecture du procès-verbal suivant :

Procès-verbal de l'expérience faite à l'Ecole Polytechnique, le 12 août 1799, sur la conversion du fer en acier par le diamant.

Le diamant employé pesoit 907 milligrammes. Comme il n'occupoit pas toute la capacité du creuset, on acheva de le remplir avec de la limaille du même fer que celui dont il étoit formé. Le creuset fut fermé avec son bouchon de fer, que l'on fit entrer avec force, pour qu'il restât le moins d'air possible dans l'intérieur.

Le creuset et le bouchon pesoient ensemble	55.8 grammes.
La limaille qui recouvroit le diamant pesoit	2
Poids total du fer environnant le diamant	57.8

Après avoir fait partir l'excédant du bouchon, le creuset fut placé seul et sans addition d'aucune matière environnante, dans un très-petit creuset de Hesse, et celui-ci dans un second creuset de même terre ; mais l'intervalle entre les deux creusets fut rempli de sable siliceux, exempt de toutes parties ferrugineuses. Enfin le plus grand creuset fut luté avec de la terre provenant de creusets pilés et d'argile crue, et le tout fut exposé environ une heure au feu de la forge à trois vents.

Tout étant refroidi, on a trouvé dans le creuset de Hesse intérieur, le creuset de fer converti en un culot d'acier fondu. Il ne formoit avec le bouchon et la limaille qu'une seule masse arrondie et bien terminée, à quelques petits globules près, qui en étoient détachés, et dont le poids n'étoit que de 884 milligrammes.

Le culot d'acier fondu pesoit..................	55.500 grammes.
Les globules détachés..............................	0.884
Poids total de l'acier obtenu...........	56.384

Le fer et le diamant pesoient, avant l'opération, 58.707 gram., d'où il suit qu'il y a une perte de fer d'environ 2.323 grammes. Ce fer avoit donné au creuset de Hesse la couleur de la plombagine.

Signé Clouet, Welter et Hachette.

Le 7 septembre 1799, M. Guyton a communiqué à l'Institut le résultat d'une nouvelle expérience du diamant. On avoit fixé sur le fond d'une petite capsule de platine, un diamant brut, cristallisé et bien transparent; on l'avoit couvert d'un mélange de 5 grammes d'alumine précipitée de l'alun par l'ammoniaque, et 15 décigrammes de chaux. Malgré les édulcorations répétées du précipité d'alumine, il retenoit encore de l'acide sulfurique. Après avoir mis la capsule de platine dans un creuset d'argile, on tint le mélange terreux et le diamant au feu d'une forge à trois vents, environ une demi-heure. M. Clouet, qui avoit proposé cette expérience, croyoit que le mélange terreux se changeroit en un verre qui se combineroit avec le diamant. Au lieu d'une masse vitreuse, on a obtenu un sulfure terreux gris, opaque, qui exhaloit sensiblement l'odeur de soufre, et qui, soumis à différens essais, en a manifesté toutes les propriétés. Le diamant étoit devenu noir, et tranchoit ainsi avec le gris du sulfure. Avant l'opération il pesoit 158 milligrammes; il a perdu 58 milligrammes, plus du tiers de son poids. Il a été remis dans cet état, par M. Guyton, au cabinet de l'Ecole Polytechnique.

Ces trois mémoires sont insérés dans les volumes 31 et 32 des *Annales de Chimie*, année 1799.

Le 31 juillet 1809, M. Guyton a lu à l'Institut un mémoire sur la décomposition de l'eau par le diamant incandescent. Ce mémoire est inséré dans la *Correspondance*, tom. 2, pag. 109. Un cinquième mémoire de M. Guyton, qu'on doit considérer comme la suite des quatre premiers, vient d'être inséré dans le volume 84 des *Annales de Chimie*, année 1812, il a pour titre: *Nouvelles expériences sur la combustion du diamant et autres substances charbonneuses, en vaisseaux clos.*

Des sept expériences dont M. Guyton rend compte dans ce dernier mémoire, les quatre premières ont pour objet la combustion du charbon de chêne, la plombagine de Keswik dans le Cumberland, la plombagine du Piémont, et l'anthracite. La

combustion du diamant est l'objet des trois dernières. Dans ces trois expériences on a brûlé 2,1650 grammes de diamant, dont 0,8665 grammes ont été donnés par M. d'Arcet. Nous allons extraire, de ce dernier mémoire, la description de l'appareil, tel que MM. Guyton et Clément l'ont disposé, et les conclusions que M. Guyton a cru devoir tirer, tant de ses expériences que de celles qui ont été faites en Angleterre, sur le même sujet, par MM. Allen et Pepys.

Extrait du cinquième mémoire sur le Diamant;

Par M. Guyton.

Les conséquences que l'examen comparatif du pouvoir réfringent de diverses substances, avoit présentées à M. Biot sur la composition du diamant, ayant fait désirer de nouvelles expériences pour déterminer sa vraie nature, nous en avons été chargés, M. Hachette et moi, par l'administration (1) de l'Ecole impériale Polytechnique, qui a mis à notre disposition 15 diamans pesant ensemble 1536 milligrammes (28.9185 grains, ou 7 karats $\frac{11}{32}$ des joailliers), réservant seulement pour son cabinet ceux qui pouvoient servir à l'instruction, soit par la régularité de leur cristallisation, soit comme conservant des traces intéressantes des commencemens de combustion que je leur avois fait subir dans mes premières expériences. M. Clément a bien voulu partager avec nous ce travail, et l'intérêt qu'y a pris M. d'Arcet, nous a procuré l'avantage de l'avoir souvent pour coopérateur.

Dans l'extrait que je publiai dans le tome 65 des *Annales de Chimie*, du mémoire de MM. Allen et Pepys, sur la nature du diamant, j'ai déjà fait connoître l'appareil qui avoit servi à nos premières expériences, et qui étoit composé d'un tube (fig. *a*, pl. 5) de platine dans lequel une pompe à cric servoit à faire passer le gaz oxigène, lorsqu'il avoit été chauffé au rouge-blanc. Ce tube que nous avions fait tirer à la manière des tubes des lunettes, pour éviter les soudures, étoit nécessairement très-mince, et fut bientôt hors de service par l'affaissement qu'il subit dans une des opérations préliminaires et qui détermina une fissure.

Obligés de faire construire un nouvel appareil, nous avons pensé que pour le mettre à l'abri de semblables accidens, il falloit donner beaucoup plus d'épaisseur au tube destiné à traverser le fourneau, et en augmenter en même-temps le calibre intérieur, afin de pouvoir y introduire des substances d'un plus

(1) Elle a aussi fourni les fonds nécessaires pour l'acquisition des appareils.

grand volume, ou même y placer un support approprié, dans les cas où il y auroit à craindre que les corps soumis à l'expérience ne fussent emportés par le courant, ou que le résidu de la combustion ne contractât quelqu'adhérence aux parois du tube (1). Il n'y avoit d'autre moyen pour atteindre ce but, que de faire forger un cylindre massif de platine, pour le forer ensuite à la manière des canons : c'est le parti que nous avons pris, et qui nous a mis en possession d'un instrument que nous croyons le plus solide et le plus commode que l'on puisse employer pour ce genre de recherches.

Je crois devoir donner ici la description de l'appareil entier (2), de la manière de s'en servir, et des perfectionnemens que nous y avons successivement ajoutés, avant de présenter les résultats des expériences pour lesquelles il a été construit.

AB (fig. 1, pl. 5), est un tube de platine de 34 centimètres de longueur. La partie *cd*, est celle dont j'ai parlé plus haut, de 15 centimètres de longueur, de 24 millimètres de grosseur, qui a été forgée pleine, et ensuite forée pour lui donner un calibre intérieur de 15 millimètres; de sorte qu'on lui a conservé quatre millimètres d'épaisseur.

A chaque bout de cette pièce est ajusté et soudé à l'or pur, un autre tube de platine laminé à 2 millimètres seulement d'épaisseur, également soudé à l'or, et terminé par un collet renforcé, ouvert intérieurement en cône, et portant cinq filets de vis, pour recevoir les ajutages, comme on les voit représentés (fig. 2), sur une plus grande échelle.

Ce tube est placé dans les échancrures pratiquées dans le fourneau *E*, *F* (fig. 1), formé de deux creusets appelés *de plomb noir*, dont on a enlevé les fonds, de 11 centimètres de diamètre dans leur évasement (3). On voit en *g* la grille; *h* est le trou pratiqué pour recevoir la tuyère d'un soufflet à double vent, d'environ 29 décimètres cubes de capacité.

Les ajutages *a*, *b*, du tube de platine, communiquent, à 38 centimètres de distance, à l'une des branches des vases à-peu-près

---

(1) C'est ce qui nous étoit arrivé en traitant dans le premier appareil de la plombagine qui nous avoit été donnée comme venant de Keswill.

(2) MM. les Elèves peuvent voir cet appareil dans le cabinet de physique de l'Ecole Polytechnique.

(3) On sait que ces creusets de *plomb noir*, qui nous viennent d'Allemagne, se taillent très-facilement; qu'ils ont la propriété de supporter le passage du chaud au froid sans se fendre; qu'ils sont très-réfractaires, et tiennent mieux que les autres la chaleur dans leur intérieur, à raison de la plombagine qui entre dans leur composition.

demi-circulaires *I* et *K*, contenant du muriate de chaux, que nous nommons par cette raison *tubes dessèchans*, et qui sont environnés de glace dans les terrines *L* et *M*. L'autre branche de ces tubes reçoit un ajutage du même genre, qui la met en communication avec l'intérieur du gazomètre placé de son côté, lorsque le robinet est ouvert.

Lorsque nous eûmes connoissance de l'appareil de MM. Allen et Pepys, décrit dans les *Transactions philosophiques* de 1807 (part. 2), nous prîmes la résolution de construire nos gazomètres à leur exemple, pour en rendre la manipulation plus facile, en réduisant le mercure à un beaucoup plus petit volume. Mais pour en étendre l'usage, et pouvoir y traiter même les gaz acides, au lieu de les faire couler en fonte, nous arrêtâmes de les faire exécuter en porcelaine.

Cependant nous ne tardâmes pas à reconnoître que l'opacité de la matière seroit un grand obstacle à la détermination précise du niveau du mercure, tant dans l'intérieur de la cloche qu'à l'extérieur; que le volume des gaz ne pourroit être ainsi mesuré qu'en rétablissant l'équilibre des deux colonnes par la communication avec la pression du dehors; ce qui ne pouvoit manquer de multiplier les chances d'erreurs, par la quantité d'ajutages et de robinets destinés à opérer cette communication. Nous revînmes donc aux gazomètres de verre. Je vais donner la description de ceux que nous avons définitivement adoptés, après plusieurs essais qui nous ont donné la mesure des précautions à prendre pour en assurer la solidité.

OP (fig. 1 et 2) est un cylindre ou *manchon* de verre blanc, de 26.5 centimètres de hauteur, de 7 millimètres d'épaisseur et de 16 centimètres de diamètre intérieur. Les bords inférieurs sont dressés pour s'appliquer exactement sur une glace doucie, mastiquée bien horizontalement sur le pied de bois *Q*. Ce manchon est fixé sur la glace par le cercle de fer *R*, réuni au pied de bois par les branches de fer *s*, qui traversent le cercle et le tirent par leurs écrous.

T est une cloche de verre sans bouton, de 12.2 centimètres de diamètre extérieur, de 19.5 de hauteur, dont les bords inférieurs s'appliquent également sur la glace du fond, et qui y est fixée par la verge de fer *U*, percée dans toute sa longueur et taraudée en vis à l'extrémité supérieure, pour entrer dans la petite calotte de fer *V*, faisant fonction d'écrou.

Cette verge de fer est percée pour recevoir un tube de verre *v*, qui s'élève de 2 centimètres au-dessus de la calotte de fer *V*, et qui, arrivé au pied de bois, en traversant la glace, se courbe et se prolonge jusqu'au robinet d'acier *X*, auquel il est mastiqué.

Enfin *Y* est le récipient mobile, ou cloche de verre de 13 cen-

timètres de diamètre intérieur, de 4 millimètres d'épaisseur, de 21.5 centimètres de hauteur. Cette cloche, dont la capacité est de près de 2 décimètres cubes, porte une échelle gravée au diamant en décilitres.

Il n'y a, comme l'on voit, aucune différence de l'un des gazomètres à l'autre, étant tous les deux destinés à faire passer et repasser les gaz par le tube de platine. On a cru seulement devoir représenter dans l'un des deux, le récipient *Y* élevé, pour indiquer l'usage des branches de fer *z*, qui lui servent de conduite.

Une attention importante dans la construction de ses instrumens, est que les pièces de verre aient été parfaitement recuites, celles sur-tout qui en forment la partie extérieure, que nous avons vues plusieurs fois se fendre lorsqu'elles étoient vides et en repos. Ces ruptures spontanées, sans changement sensible de température, ne pouvant être occasionnées que par des vibrations, on prévient ces accidens en couvrant cette partie d'un vélin qui laisse assez de transparence pour juger les lignes de niveau du mercure, que l'on peut même enlever vis-à-vis l'échelle, sans qu'il cesse de produire son effet.

La figure 3 représente, de grandeur naturelle, le tube par lequel on fait passer les gaz que l'on veut introduire dans un gazomètre, pour qu'ils y laissent toute l'eau que le muriate de chaux peut leur enlever. *A*, *B* est un tube de verre pouvant contenir de 20 à 22 grammes de ce sel poussé à fusion sèche et cassé en morceaux de la grosseur d'un pois. Ce tube, pris des deux bouts dans des viroles mastiquées, s'adapte à l'un des robinets *X*, par l'extrémité *C*, garnie comme toutes les jointures de l'appareil, d'un cône alaisé, qui, pressé par la boîte coulante à écrou *E*, empêche toute communication avec l'air du dehors. L'autre extrémité *D* est terminée en vis pour recevoir le robinet d'un récipient, d'une vessie, ou d'une pompe à double ajutage.

C'est par le moyen d'un tube semblable, que M. Van-Marum desséchoit le gaz oxigène dans ses expériences sur la combustion du phosphore en vaisseaux fermés (1). L'un des objets les plus importans de celles que nous nous proposions, étant de saisir et de déterminer les moindres quantités d'eau qui pouvoient être portées par le gaz, ou qui auroient pu se former dans l'opération, nous n'avons pas cru devoir nous borner à ce premier dessèchement lors de l'introduction du gaz, et nous y avons ajouté les deux autres *tubes dessèchans* dont j'ai parlé, qui, étant destinés par leur position à tamiser en quelque sorte les gaz, toutes les fois que nous les ferions passer et repasser dans le cylindre de

(1) *Description de quelques appareils*, etc., p. 36.

platine incandescent, ne permettroient pas qu'aucune partie d'eau pût échapper à l'action du sel, sur-tout avec la précaution d'y entretenir la température de la glace fondante.

M. Van-Marum employoit, à l'exemple de Saussure, la potasse fondue au creuset; nous avons donné la préférence au muriate de chaux, non que nous lui attribuions la propriété d'attirer plus puissamment l'humidité, mais parce que la potasse passant beaucoup plus promptement à un état pâteux, qui dispose les angles des fragmens à se réunir, ne pouvoit servir que dans des conduits placés horizontalement; en observant encore de pratiquer l'entrée et la sortie du gaz dans la partie supérieure; et que l'agglutination de ces mêmes fragmens au fond de nos tubes circulaires, auxquels nous accordions le plus de confiance, auroit suffi pour intercepter la communication. Il n'est pas besoin de dire que nous n'avions pas le choix dans ces derniers, où la potasse auroit pris le gaz acide carbonique qu'il s'agissoit principalement de recueillir et de mesurer.

Quoique la propriété du muriate de chaux poussé à fusion sèche, d'attirer l'humidité de l'air, soit bien connue, nous n'avons pas négligé de nous assurer, par des essais, de la puissance de celui que nous avions préparé.

Sous une cloche de verre contenant cinq décimètres cubes d'air, placée sur le mercure, on a introduit l'hygromètre pour les gaz, dont j'ai donné la description (1), chargé de 13.325 grammes de muriate de chaux en morceaux. Le godet qui le contenoit, retiré et pesé le 6e. jour, avoit reçu une augmentation de poids de 92 milligrammes, ou de 18.4 par décimètre cube d'air.

Le godet replacé sur-le-champ sous la cloche, on y fit passer à travers le mercure, une petite fiole contenant 120 milligrammes d'eau distillée. Deux jours après, il ne restoit plus d'eau dans la fiole, et le muriate de chaux avoit acquis une nouvelle augmentation de poids de 195 milligrammes, c'est-à-dire 75 de plus que le poids de l'eau.

On a reporté successivement sous la même cloche 25 décigrammes d'eau, observant à chaque fois de prendre l'augmentation de poids du muriate de chaux et les quantités d'eau retrouvées dans la fiole, lorsqu'on n'avoit pas donné le temps pour l'évaporation totale; le résultat de l'expérience a été une absorption de 2.620 grammes de l'eau introduite, et une augmentation de poids du muriate de 2.871 grammes, y compris les 92 milligrammes fournis le premier jour par l'air de la cloche; les 159 milligrammes en sus étoient nécessairement le produit de l'humidité transmise par le mercure de la cuve, pendant la durée de l'ex-

(1) *Annales de Chimie*, octobre 1808.

périence, quoique la cloche y fût enfoncée à plus d'un centimètre au-dessous du niveau. Le muriate de chaux seulement blanchi et un peu gonflé à sa surface, laissoit encore des interstices suffisans pour la circulation de l'air.

On verra que chacun de nos tubes demi-circulaires pouvoit tenir de 11 à 12 grammes du même sel; de sorte qu'en suivant les mêmes proportions, ils devoient absorber 4.74 grammes d'eau avant que la surface des fragmens devînt assez liquide pour en opérer la réunion, ce qui donne une puissance attractive bien supérieure à celle dont nous avions besoin; mais cet excès nous garantissoit la rapidité de l'absorption, qui, comme tous les effets de l'affinité, dépend du contact des élémens qu'il s'agit de combiner.

Après cela, il ne nous étoit plus possible de douter que l'augmentation de poids de ces tubes desséchans ne représentât exactement toute la quantité d'eau qui auroit été introduite dans l'appareil, ou qui s'y seroit formée pendant l'opération. C'est pour que l'on puisse avec connoissance en porter le même jugement, que j'ai cru devoir rendre un compte aussi détaillé des moyens que nous avons pris pour atteindre ce but.

Le gas oxigène que nous avons employé a toujours été tiré immédiatement avant l'expérience, du muriate sur-oxigéné de potasse.

On a fait bouillir le mercure avant que d'en remplir les gazomètres.

Enfin les volumes des fluides aériformes n'ont été déterminés que d'après les corrections qu'exigeoient la température et la pression.

Ces précautions indiquées une fois pour toutes, M. Guyton passe aux expériences faites avec l'appareil qu'il a décrit; et après avoir exposé les faits tels qu'on les a observés, il en tire la conclusion suivante :

CONCLUSION.

Il n'est plus possible d'admettre dans la composition du diamant un *tiers* ou même un *quart* de son poids d'hydrogène. Les expériences dont nous venons d'exposer les procédés et les résultats, nous paroissent fournir à ce sujet des preuves plus directes que celles que MM. Davy, Allen et Pepys opposoient déjà à cette théorie, et qui faisoient dire à M. Haüy, « que leurs résultats s'accordoient à infirmer l'opinion que l'hydrogène fût la » cause de la grande puissance réfractive du diamant; opinion » dont la vraisemblance étoit fondée sur les applications aussi » exactes qu'ingénieuses que MM. Biot et Arago avoient faites

---

Analyse (1) *d'un Mémoire sur la Distribution de l'Electricité à la surface des Corps conducteurs ;*

Par M. Poisson.

La théorie de l'électricité la plus généralement admise est celle qui attribue tous les phénomènes à deux fluides différens, répandus dans tous les corps de la nature. On suppose que les molécules d'un même fluide se repoussent mutuellement, et qu'elles attirent les molécules de l'autre : ces forces d'attraction et de répulsion suivent la raison inverse du quarré des distances; à la même distance, le pouvoir attractif est égal au pouvoir répulsif, d'où il résulte que, quand toutes les parties d'un corps renferment une égale quantité de l'un et de l'autre fluide, ceux-ci n'exercent aucune action sur les fluides contenus dans les corps environnans, et il ne se manifeste par conséquent aucun signe d'électricité. Cette distribution égale et uniforme des deux fluides est ce qu'on appelle leur *état naturel;* dès que cet état est troublé par une cause quelconque, le corps dans lequel cela arrive est *électrisé*, et les différens phénomènes de l'électricité commencent à se produire.

Tous les corps de la nature ne se comportent pas de la même manière par rapport au fluide électrique : les uns, comme les métaux, ne paroissent exercer sur lui aucune espèce d'action; ils lui permettent de se mouvoir librement dans leur intérieur et de les traverser dans tous les sens : pour cette raison on les nomme *corps conducteurs*. D'autres, au contraire, l'air très-sec, par exemple, s'opposent au passage du fluide électrique dans leur intérieur, de sorte qu'ils servent à empêcher le fluide accumulé dans les corps conducteurs de se dissiper dans l'espace. Les phénomènes que présentent les corps conducteurs électrisés, soit quand on les considère isolément, soit lorsqu'on en rapproche plusieurs les uns des autres, pour les soumettre à leur influence mutuelle, sont l'objet de ce Mémoire, dans lequel

---

(1) Cet article précède le mémoire que M. Poisson a lu les 9 mai et 12 août 1812, à la Classe de l'Institut, dont il est membre. Il a déjà paru dans plusieurs ouvrages périodiques; néanmoins, j'ai cru devoir l'insérer dans cette feuille, spécialement destinée à une école, où l'on enseigne l'application de l'analyse aux questions de physique, dont la solution dépend des lois générales de la mécanique. H. C.

je me suis proposé d'appliquer le calcul à cette partie importante de la physique. Avant d'entrer en matière, je vais exposer avec quelques détails les principes qui servent de base à mon analyse, et faire connoître les résultats les plus remarquables auxquels elle m'a conduit.

Considérons un corps métallique, de forme quelconque, entièrement plongé dans l'air sec, et supposons que l'on y introduise une quantité donnée de l'un des deux fluides. En vertu de la force répulsive de ses parties, et à cause que le métal n'oppose aucun obstacle à son mouvement, on conçoit que le fluide ajouté va être transporté à la surface du corps, où il sera retenu par l'air environnant. Coulomb a prouvé en effet, par des expériences directes, qu'il ne reste aucun atôme d'électricité dans l'intérieur d'un corps conducteur électrisé, si ce n'est toutefois l'électricité naturelle de ce corps: tout le fluide ajouté se distribue à sa surface; il y forme une couche extrêmement mince, qui ne pénètre pas sensiblement au-dessous de cette surface, et dont l'épaisseur en chaque point dépend de la forme du corps. Cette couche est terminée extérieurement par la surface même du corps, et à l'intérieur par une autre surface très-peu différente de la première; elle doit prendre la figure propre à l'équilibre des forces répulsives de toutes les molécules qui la composent, ce qui exigeroit d'abord que la surface libre du fluide, c'est-à-dire, sa surface intérieure, fût perpendiculaire en tous ses points à la résultante de ces forces; mais la condition d'équilibre de la couche fluide est comprise dans une autre, à laquelle il est nécessaire et il suffit d'avoir égard.

En effet, pour qu'un corps conducteur électrisé demeure dans un état électrique permanent, il ne suffit pas que la couche fluide qui le recouvre se tienne en équilibre à sa surface; il faut, en outre, qu'elle n'exerce ni attraction, ni répulsion, sur un point quelconque pris au hasard dans l'intérieur du corps; car si cette condition n'étoit pas remplie, l'action de la couche électrique sur les points intérieurs décomposeroit une nouvelle quantité de l'électricité naturelle du corps, et son état électrique seroit changé. La résultante des actions de toutes les molécules qui composent la couche fluide, sur un point pris quelque part que ce soit dans l'intérieur du corps, doit donc être égale à zéro; par conséquent elle est aussi nulle pour tous les points situés à la surface intérieure de cette couche; la condition relative à sa direction devient donc superflue; ou, autrement dit, l'équilibre de la couche fluide est une suite nécessaire de ce qu'elle n'exerce aucune action dans l'intérieur du corps.

Il résulte de ce principe, que, si l'on demande la loi suivant laquelle l'électricité se distribue à la surface d'un sphéroïde de forme donnée, la question se réduira à trouver quelle doit être l'épaisseur de la couche fluide en chaque point de cette surface, pour que l'action de la couche entière soit nulle dans l'intérieur du corps électrisé. Ainsi, par exemple, on sait qu'un sphéroïde creux, terminé par deux surfaces elliptiques, semblables entre elles, n'exerce aucune action sur tous les points compris entre son centre et sa surface intérieure, en y comprenant les points mêmes de cette surface; on en conclut donc que, si le corps électrisé est un ellipsoïde quelconque, la surface intérieure de la couche électrique sera celle d'un autre ellipsoïde concentrique et semblable à l'ellipsoïde donné, ce qui détermine son épaisseur en tel point qu'on voudra : cette épaisseur sera la plus grande au sommet du plus grand des trois axes, et la plus petite au sommet du plus petit; les épaisseurs de la couche, ou les quantités d'électricité, qui répondent à deux sommets différens, seront entre elles comme les longueurs des axes qui aboutissent à ces sommets.

M. Laplace a donné, dans le IIIe. livre de la Mécanique céleste (1), la condition qui doit être remplie pour que l'attraction d'une couche terminée par deux surfaces à-peu-près sphériques, soit égale à zéro, relativement à tous les points intérieurs; en supposant donc que l'épaisseur de cette couche devienne très-petite, on en concluera immédiatement la distribution de l'électricité à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère; mais ce cas et celui de l'ellipsoïde sont les seuls où l'on puisse assigner, dans l'état actuel de la science, l'épaisseur variable de la couche fluide qui recouvre un corps conducteur électrisé.

Lorsque la figure de la couche électrique est déterminée, les formules de l'attraction des sphéroïdes font connoître son action sur un point pris en dehors ou à la surface du corps électrisé. En faisant usage de ces formules, j'ai trouvé qu'à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, la force répulsive du fluide électrique est proportionnelle à son épaisseur en chaque point; il en est de même à la surface d'un ellipsoïde de révolution, quel que soit le rapport de ses deux axes; de sorte que sur ces deux espèces de corps, la répulsion électrique est la plus grande dans les points où l'électricité est accumulée en plus grande quantité. Il est naturel de penser que

(1) Tome II, page 37.

ce résultat est général, et qu'il a également lieu à la surface d'un corps conducteur de forme quelconque ; mais quoique cette proposition paroisse très-simple, il seroit cependant très-difficile de la démontrer au moyen des formules de l'attraction des sphéroïdes; et c'est un de ces cas où l'on doit suppléer à l'imperfection de l'analyse par quelque considération directe. On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, une démonstration purement synthétique, que M. Laplace a bien voulu me communiquer, et qui prouve qu'à la surface de tous les corps électrisés, la force répulsive du fluide est partout proportionnelle à son épaisseur.

La pression que le fluide exerce contre l'air qui le contient, est en raison composée de la force répulsive et de l'épaisseur de la couche; et puisque l'un de ces élémens est proportionnel à l'autre, il s'ensuit que la pression varie à la surface d'un corps électrisé, et qu'elle est proportionnelle au quarré de l'épaisseur ou de la quantité d'électricité accumulée en chaque point de cette surface. L'air imperméable à l'électricité doit être regardé comme un vase dont la forme est déterminée par celle du corps électrisé; le fluide que ce vase contient, exerce contre ses parois des pressions différentes en différens points, de telle sorte que la pression qui a lieu en certains points, est quelquefois très-grande et comme infinie, par rapport à celle que d'autres éprouvent. Dans les endroits où la pression du fluide vient à surpasser la résistance que l'air lui oppose, l'air cède, ou, si l'on veut, le vase crève, et le fluide s'écoule comme par une ouverture. C'est ce qui arrive à l'extrémité des pointes et sur les arêtes vives des corps anguleux; car on peut démontrer qu'au sommet d'un cône, par exemple, la pression du fluide électrique deviendroit infinie si l'électricité pouvoit s'y accumuler. A la surface d'un ellipsoïde alongé, la pression ne devient infinie en aucun point; mais elle sera d'autant plus considérable aux deux pôles, que l'axe qui les joint sera plus grand par rapport au diamètre de l'équateur. D'après les théorêmes que je viens de citer, cette pression sera à celle qui a lieu à l'équateur du même corps, comme le quarré de l'axe des pôles est au quarré du diamètre de l'équateur; de manière que si l'ellipsoïde est très-allongé, la pression électrique pourra être très-foible à l'équateur, et surpasser la résistance de l'air aux pôles. Ainsi, lorsqu'on électrise une barre métallique qui a la forme d'un ellipsoïde très-alongé, le fluide électrique se porte principalement vers ses extrémités, et il s'échappe par ces deux points, en vertu de son excès de pression sur la résistance que l'air lui oppose. En général, l'accroissement indéfini de la pression électrique, en certains

points des corps électrisés, fournit une explication naturelle et précise de la faculté qu'ont les pointes de dissiper dans l'air non-conducteur le fluide électrique dont elles sont chargées.

Le principe dont je suis parti pour déterminer la distribution du fluide électrique à la surface d'un corps isolé, s'applique également au corps d'un nombre quelconque de corps conducteurs soumis à leur influence mutuelle : pour que tous ces corps demeurent dans un état électrique permanent, il est nécessaire et il suffit que la résultante des actions des couches fluides qui les recouvrent, sur un point quelconque pris dans l'intérieur de l'un de ces corps, soit égale à zéro : cette condition remplie, le fluide électrique sera en équilibre à la surface de chacun de ces corps, et il n'exercera aucune décomposition du fluide qu'ils renferment dans leur intérieur, et qui s'y trouve à l'état naturel. L'application de ce principe fournira, dans chaque cas, autant d'équations que l'on considérera de corps conducteurs, et ces équations serviront à déterminer l'épaisseur variable de la couche électrique sur ces différens corps. S'il se trouvoit, en outre, près de ceux-ci, d'autres corps qui fussent absolument non-conducteurs, il faudroit avoir égard à leur action sur le fluide répandu à la surface des corps conducteurs; mais comme le fluide électrique ne peut prendre aucun mouvement dans l'intérieur des corps non-conducteurs, on n'auroit, par rapport aux corps de cette espèce, aucune condition à remplir, et le nombre des équations du problême sera toujours égal à celui des corps conducteurs.

Je me suis borné dans ce Mémoire à donner ces équations pour le cas de deux sphères de différens rayons, formées d'une matière parfaitement conductrice, et placées à une distance quelconque l'une de l'autre. Les deux équations que j'ai trouvées sont aux différences finies, à deux variables indépendantes et à différences variables : on les réduit d'abord à deux autres équations à une seule variable indépendante, et la solution du problême ne dépend plus que de leur intégration. Lorsque les deux sphères se touchent, ces équations s'intègrent sous une forme très-simple par des intégrales définies. C'est ce cas particulier que je me suis spécialement attaché à résoudre, et l'on trouvera, dans la suite de ce Mémoire, des formules au moyen desquelles on peut calculer l'épaisseur de la couche électrique en chaque point de chacune des deux sphères. Cette épaisseur est nulle au point de contact, c'est-à-dire que quand deux sphères dont les rayons ont entre eux un rapport quelconque, sont mises en contact et électrisées en commun, le calcul montre qu'il n'y a jamais d'électricité au point par

lequel elles se touchent. Ce résultat remarquable est pleinement confirmé par l'expérience, ainsi qu'on peut le voir dans les Mémoires que Coulomb a publiés sur ce sujet (1).

Dans le voisinage du point de contact, et jusqu'à une assez grande distance de ce point, l'électricité est très-foible sur les deux sphères : lorsqu'elle commence à devenir sensible, elle est d'abord plus intense sur la plus grande des deux surfaces; mais elle croît ensuite plus rapidement sur la plus petite; et au point diamétralement opposé à celui du contact sur cette sphère, l'épaisseur de la couche électrique est toujours plus grande qu'elle ne l'est au même point sur l'autre sphère. Le rapport des épaisseurs de la couche électrique en ces deux points augmente à mesure que le rayon de la petite sphère diminue; mais cet accroissement n'est pas indéfini; il tend au contraire vers une limite constante que le calcul détermine, et qui est exprimée par une transcendante numérique, égale à 4,2 à-peu-près. Coulomb a aussi conclu de ses expériences que ce même rapport s'approche continuellement d'être égal à quatre et une fraction qu'il n'a pas assignée (2).

Lorsque l'on sépare deux sphères qui étoient primitivement en contact, chacune d'elles emporte la quantité totale d'électricité dont elle est recouverte; et après qu'on les a soustraites à leur influence mutuelle, cette électricité se distribue uniformément sur chaque sphère. Or, j'ai déduit de mon analyse le rapport des épaisseurs moyennes du fluide électrique sur les deux sphères, en fonction du rapport de leurs rayons; la formule à laquelle je suis parvenu renferme donc la solution de ce problême de physique : *Trouver suivant quel rapport l'électricité se partage entre deux globes qui se touchent, et dont les rayons sont donnés?* La formule fait voir que ce rapport est toujours moindre que celui des surfaces; de sorte qu'après la séparation des deux globes, l'épaisseur de la couche électrique est toujours la plus grande sur le plus petit des deux. Le quotient de cette plus grande épaisseur, divisée par la plus petite, augmente à mesure que le plus petit rayon diminue; mais ce quotient tend vers une limite constante que l'on trouve égale au quarré du rapport de la circonférence au diamètre, divisé par six, quantité dont la valeur est à-peu-près $\frac{5}{3}$, ainsi, quand on pose sur une sphère électrisée une autre sphère d'un diamètre très-petit relativement au diamètre de la première, l'électricité se partage entre ces deux corps, dans le rapport d'environ cinq fois la petite surface à trois fois

(1) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1787.
(2) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1787, pag. 457.

la grande. Dans les diverses expériences que Coulomb a faites pour mesurer le rapport dont nous parlons, il a constamment trouvé qu'il est moindre que celui des surfaces, et toujours au-dessous du nombre 2; d'où il avoit conclu que 2 est la limite que ce rapport atteindroit, si le rayon de la petite sphère devenoit infiniment petit (1); mais quoique cette limite ne fût pas de nature à pouvoir se déterminer exactement par l'expérience, on voit que celle qu'il avoit soupçonnée ne diffère que d'environ un cinquième de la véritable limite donnée par le calcul.

On ne verra sans doute pas sans intérêt l'accord remarquable qui existe entre le calcul et les expériences publiées il y a vingt-cinq ans, par l'illustre physicien que j'ai déjà plusieurs fois cité. J'ai trouvé dans les Mémoires de Coulomb, les résultats numériques de quatorze expériences qui ont pour objet de déterminer le rapport des quantités totales d'électricité sur deux sphères en contact de différens rayons, et celui des épaisseurs de la couche électrique en différens points de leurs surfaces. La plupart de ces résultats sont des moyennes entre un grand nombre d'observations faites avec le plus grand soin, au moyen de la balance électrique; l'auteur a tenu compte de la perte du fluide électrique par l'air; les nombres qu'il a publiés sont corrigés de cette perte, et à-peu-près les mêmes que si l'air étoit absolument imperméable, comme la théorie le suppose; ils sont donc comparables à ceux qui résultent de nos formules; et, pour en faciliter la comparaison, j'ai calculé tous les rapports que Coulomb a mesurés : et j'en ai formé plusieurs tableaux que l'on trouvera dans la suite de ce mémoire. La différence moyenne entre les résultats de ces quatorze observations et ceux du calcul, ne s'élève pas à un *trentième* de la chose que l'on veut déterminer.

Tant que l'on ne considère qu'un seul corps électrisé, ou plusieurs corps qui se touchent de manière que le fluide électrique puisse passer librement d'un corps sur un autre, on n'a jamais qu'un seul des deux fluides répandu sur les surfaces de tous ces corps, que je suppose toujours parfaitement conducteurs; cependant j'ai voulu montrer par un exemple comment l'analyse s'applique également au cas où les deux fluides se trouvent à-la-fois sur une même surface : j'ai choisi, pour cela, le cas de deux sphères qui ne se touchent pas, et qui sont au contraire séparées par un intervalle très-grand par rapport à l'un des deux rayons. La considération de cette grande distance simplifie les formules et les résultats, et permet de discuter facilement tout ce

(1) Mémoires cités, pag. 437.

qui arrive sur la petite sphère. Si l'on suppose que celle-ci n'étoit pas électrisée primitivement, et qu'elle ne le soit que par l'influence de la grande sphère, on trouve, comme cela doit être en effet, que l'électricité contraire à celle de la grande sphère, se porte vers le point qui en est le moins éloigné, et l'électricité semblable, vers le point opposé ; les électricités contraires en ces deux points sont à-peu-près égales, ou du moins leur rapport diffère d'autant moins de l'unité, que la distance entre les deux sphères est plus grande ; en même-temps la ligne de séparation des deux fluides sur la petite sphère se rapproche de plus en plus du grand cercle perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres ; de sorte qu'à une très-grande distance, cette ligne partage la petite sphère en deux parties à-peu-près égales. Au reste, quelles que soient les électricités primitives de deux sphères très-éloignées l'une de l'autre, le calcul donne, par des formules très-simples, la quantité et l'espèce de l'électricité en chaque point de l'une et de l'autre des deux surfaces. Il n'existe pas d'expériences faites jusqu'à présent, auxquelles on puisse comparer les formules ; mais on trouve dans les Mémoires de Coulomb un fait curieux qu'il a observé, et qui, par sa liaison avec ces mêmes formules, peut encore fournir une nouvelle confirmation de la théorie.

Si l'on a deux sphères de rayons inégaux, électrisées positivement, et qui soient d'abord en contact ; que l'on détache la petite sphère et qu'on l'éloigne de la grande, on trouve que l'électricité qui étoit nulle au point de contact, devient positive sur la grande sphère, et négative sur la petite ; l'électricité négative du point de la petite sphère le plus voisin de la grande subsiste jusqu'à une certaine distance, à laquelle elle est zéro, comme au point de contact, et au-delà de laquelle elle devient positive. Cette distance est d'autant plus grande, que les rayons des deux sphères diffèrent davantage l'un de l'autre ; mais Coulomb a remarqué que quand l'un des rayons est le sixième, ou moindre que le sixième de l'autre, la distance du second zéro atteint son *maximum*, et ne varie plus sensiblement : il a trouvé qu'à cette limite, l'intervalle qui sépare les deux sphères est un peu moindre que la moitié du rayon de la grande (1). Or, on peut appliquer à ce cas les formules relatives à deux sphères dont la distance mutuelle est très-grande par rapport à l'un des deux rayons ; en supposant en outre ce rayon tres-petit par rapport à l'autre, on trouve qu'il y a effectivement une distance pour

(1) Son diamètre étant exprimé par 11, cet intervalle est égal à $2 + \frac{5}{12}$, ce qui donne $\frac{29}{66}$, pour ce même intervalle divisé par le rayon. (Pag. 450 des Mémoires cités.

laquelle l'électricité est nulle au point de la petite sphère le plus voisin de la grande : en deçà l'électricité de ce point est négative, et au-delà elle est positive, conformément à l'expérience; de plus, le calcul donne, pour cette distance, une quantité un peu plus grande que le tiers du rayon de la grande sphère; la distance observée et la distance calculée sont donc toutes deux comprises entre le tiers et la moitié de ce rayon; et quoique la première surpasse un peu la seconde, les deux résultats s'accordent aussi bien qu'on peut le désirer. Leur différence doit être attribuée aux erreurs inévitables dans une observation aussi délicate, et à la perte de l'électricité par l'air, dont l'effet, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, est d'augmenter la distance dont il s'agit, et par conséquent de la faire paroître plus grande que la même distance calculée.

Tels sont les principaux résultats qui font l'objet de ce mémoire. Je me propose, dans la suite, de continuer ce genre de recherches, et de les étendre à d'autres cas plus compliqués, que Coulomb a aussi considérés, et sur lesquels il a publié un grand nombre d'observations qui pourront encore servir à vérifier la théorie.

NOUVELLES COMBINAISONS CHIMIQUES.

Expériences de M. Thénard.

Les métaux, tels que le fer, le cuivre, le platine, etc., élevés à une haute température, décomposent le gaz ammoniac, sans rien enlever à ce gaz, ou sans rien lui céder qui soit pondérable. Après cette décomposition, le fer devient cassant; le cuivre est d'une fragilité qui permet à peine de le toucher sans le rompre. De rouge, il devient jaune, et quelquefois blanchâtre. Ces métaux conservent leurs propriétés métalliques; leur poids n'augmente ni ne diminue. S'ils n'agissent (dit M. Thénard) sur le gaz ammoniac que comme conducteurs de la chaleur, et en rendant très-intense la température intérieure du tube, il restera toujours à expliquer comment dix grammes de fil de fer décomposent complètement un courant rapide de gaz ammoniac à la chaleur rouge cerise, tandis qu'une quantité quadruple de platine en décompose tout au plus la moitié, même à une température plus élevée.

Expériences de M. GAY-LUSSAC.

M. Gay-Lussac a observé que la température de l'ébullition de l'eau, ou de tout autre liquide, dépend de la nature du vase qui contient ce liquide. Faisant bouillir de l'eau dans un matras de verre, et l'éloignant du feu, l'ébullition, après quelques instans, cesse; mais en projetant dans le matras quelques limailles métalliques, l'ébullition recommence. La température de l'ébullition d'un liquide dans deux vases, l'un de verre et l'autre de métal, peut différer de plusieurs degrés. Cette différence est pour l'acide sulfurique de quelques degrés; et pour l'eau, d'un degré environ.

Cette expérience fait connoître la cause d'un accident, autrefois très-fréquent dans la distillation des acides : la formation spontanée d'une grande quantité de vapeurs acides soulevoit la masse liquide, et cette masse, en tombant, cassoit les cornues. On évite les soubresauts en mettant dans les cornues quelques fils de platine, qui favorisent le dégagement des vapeurs, au *minimum* de température nécessaire pour la formation de ces vapeurs.

Expériences de M. DULONG (1).

De toutes les substances détonnantes, la plus remarquable par la rapidité de l'explosion, et la violence des percussions qui en résultent, est un liquide que M. Dulong a découvert en octobre 1811, et qu'on nomme *acide oxi-muriatique azoté*. Ce liquide, qu'on obtient en faisant passer un courant de gaz oxi-muriatique dans une dissolution de sel ammoniacal, à la température d'environ 7 à 8°, se présente sous la forme d'une huile. Sa pesanteur spécifique est plus grande que celle de l'eau; il est très-volatil, exposé à l'air, il s'évapore sans résidu. Mis en contact avec le phosphore, il produit une violente détonation. M. Dulong pense que dans la détonation, tous les élémens de cette substance sont séparés et ne forment aucune nouvelle combinaison. Il auroit poursuivi ce genre de recherches s'il n'exposoit pas aux plus grands dangers; après avoir perdu un œil, il faillit encore être victime d'un accident très-grave. Le courage et la sagacité honorent le savant, à qui l'on doit de pareilles découvertes.

---

(1) Admis élève à l'Ecole Polytechnique, en l'an 10 (1801).

§. III. — ANNONCES.

Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le conseil d'instruction, 1 vol. in-4°., cahiers 7 et 8, contenant les leçons données, en 1795, à l'ancienne école Normale, par MM. LAGRANGE et LAPLACE. On a joint à ce cahier le mémoire de Fermat, sur le contact des sphères, traduit par M. HACHETTE.

M. Lagrange a donné cinq leçons; la 1re. sur l'arithmétique, les fractions et les logarithmes; la 2e. sur les opérations de l'arithmétique; la 3e. sur la résolution des équations du troisième et du quatrième degré; la 4e. sur les équations numériques; la 5e. sur l'usage des courbes dans la solution des problêmes.

Les leçons de M. Laplace sont au nombre de dix.

1re. *Leçon*. Programme. — De la numération et des opérations de l'arithmétique.

2e. *Leçon*. Sur les fractions, les puissances et l'extraction des racines; les proportions, les progressions et les logarithmes.

3e. *Leçon*. Des premières opérations de l'algèbre; des puissances et des exposans.

4e., 5e. et 6e. *Leçons*. Sur la Théorie des Equations.

7e. *Leçon*. Sur la géométrie élémentaire. Notions sur les limites. Principes de trigonométries rectiligne et sphérique.

8e. *Leçon*. Sur l'application de l'algèbre à la géométrie.

9e. *Leçon*. Sur le nouveau système des poids et mesures.

10e. *Leçon*. Sur les probabilités. La théorie analytique des probabilités est l'objet d'un ouvrage que M. Laplace a publié l'année dernière (1812).

On se rappellera que c'est pour la même Ecole Normale que M. Monge a écrit la *Géomètrie descriptive*; ce traité est le complément des leçons de mathématiques données à cette école.

Théorie des fonctions analytiques, par J.-L. LAGRANGE, 2e. édition, 1813, revue et augmentée par l'auteur.

Cet ouvrage, 1re. édition, 1797, forme le 9e. cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*. Il a été suivi de leçons données à la même école en 1799. Ces leçons, sur le calcul des fonctions, forment le 12e. cahier et le supplément de ce cahier.

Elémens de Géomètrie, 9e. édition, 1812, in-8°.
Exercices de Calcul intégral, in-4°, 1811.
Essai sur la Théorie des Nombres, 2e. édit., 1808.
} Par M. LEGENDRE.

Cours de Mathématiques, par M. Lacroix.

Arithmétique, 11e. édition, 1811; Algèbre, 10e. édition, 1812; Géométrie, 9e. édition, 1811; Complément d'Algèbre, 3e. édition, 1804; Complément de Géométrie, 3e. édition, 1808; Calcul différentiel et intégral, in-4°., 2e. édition, 1er. volume, 1812; Abrégé de ce Calcul, in-8°., 2e. édition, 1806.

Essai de Géométrie analytique, 5e. édition, 1813, par M. Biot.

De la Richesse Minérale, par M. Heron-de-Villefosse, Ingénieur des Mines, in-4°., 1er. volume, division économique.

De la Défense des Places fortes; ouvrage composé pour l'instruction des Élèves du Corps du Génie, par M. Carnot, 3e. édition, in-4°., 1812.

Mémoire sur la Guerre souterraine, par M. Coutèle, Officier du Génie, in-4°. Savone, 1812.

Exposé de la situation de l'Empire, présenté au Corps Législatif, dans sa séance du 25 février 1813, par S. Exc. M. le Comte de Montalivet, Ministre de l'Intérieur.

Extrait.

En 1809, le nombre des élèves des Lycées n'étoit que de 9500, dont 2700 externes, et 6800 pensionnaires;

Aujourd'hui, le nombre des élèves est de 18000, dont 10000 externes, et 8000 pensionnaires.

Cinq cent dix colléges donnent l'instruction à 50000 élèves, dont 12000 pensionnaires.

Dix-huit cent soixante-dix-sept pensions ou institutions particulières sont fréquentées par 47000 élèves.

Trente-un mille écoles primaires donnent l'instruction du premier degré à 920000 jeunes garçons. Ainsi un million de jeunes français reçoit le bienfait de l'instruction publique.

L'école normale de l'Université forme des sujets distingués dans les sciences, dans les lettres, dans la manière de les enseigner. Ils portent chaque année dans les lycées les bonnes traditions, les méthodes perfectionnées.

Les 35 académies de l'Université ont 9000 auditeurs; les deux tiers de ces élèves suivent les cours de droit et de médecine.

L'école Polytechnique donne tous les ans aux écoles spéciales du génie, de l'artillerie, des ponts-et-chaussées et des mines, 150 sujets déjà recommandables par leurs connoissances.

Les écoles de Saint-Cyr, de Saint-Germain, de la Flèche, fournissent tous les ans 1500 jeunes gens pour la carrière militaire.

ÉVÉNEMENS PARTICULIERS.

Ecole impériale des Ponts-et-Chaussées.

Son Exc. le Ministre de l'Intérieur a fait, le 31 décembre, à l'Ecole impériale des Ponts-et-Chaussées, la distribution solennelle des prix du cours de 1812.

Les pièces de concours avoient été jugées, suivant l'usage, par un Jury composé d'une commission de membres de la première Classe de l'Institut impérial de France, et des Inspecteurs-Généraux des Ponts-et-Chaussées.

Son Exc. le Ministre de l'Intérieur; M. le Comte Molé, Conseiller-d'Etat, Directeur-Général des Ponts-et-Chaussées, et M. Prony, Inspecteur-Général, Directeur de l'Ecole, ont successivement adressé la parole aux Elèves.

Voici le tableau des prix décernés d'après le jugement du Jury.

OBJETS DU CONCOURS.	NOMS DES ÉLÈVES.	PRIX.
Problème de Mécanique	Guillebon	1er. Prix.
	Coriolis	2e. Prix.
Style	Bernard	1er. Prix.
	Bellanger	2e. Prix.
Carte ou Ecriture moulée	Band	Prix.
Route et Ponceau	Mosca	1er. Prix.
	Drappier	2e. Prix.
Coupe des Pierres	Cariormazzi	1er. Prix.
	Couturat	2e. Prix.
Pont en charpente	Leblanc	1er. Prix.
	Lacordaire	2e. Prix.
Projet de Canal	Surville	1er. Prix.
	Bellanger	2e. Prix.
Projet d'Ecluse	Moreuse	1er. Prix.
	Gensolen	2e. Prix.
ARCHITECTURE : *Maison de campagne*	De Besson	1er. Prix.
	Mosca	2e. Prix.
ARCHITECTURE : *Etablissement destiné à contenir l'approvisionnement de vivres pour 40 vaisseaux de ligne*	Surville	1er. Prix.
	Jouvin	2e. Prix.
TRAVAUX MARITIMES : *Forme couverte*	Leblanc	1er. Prix.
	Panichot	2e. Prix.

Ecole impériale Polytechnique.

Le corps enseignant de l'Ecole Polytechnique et les Elèves ont offert à Sa Majesté huit chevaux d'artillerie légère équipés.

§. IV. — PERSONNEL.

Promotions des anciens Elèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs. (Voyez *les promotions précédentes, pag.* 297 *et* 370 *de ce volume.*)

ARTILLERIE DE TERRE.

M. Allix, cité page 127, tome 1er, comme ayant été autorisé à suivre l'instruction de l'Ecole Polytechnique, est général de division.

Majors. — MM. Bernard, Lallemand, Brechtel.

Chefs de Bataillon.—MM. Paulin, Failly, Richard, Pache, Evain, Forceville, Duchand (nommé en 1809).

GÉNIE MARITIME.

Ingénieur de Marine, Chef de Bataillon. — M. Moreau, membre de la Légion-d'Honneur et du conseil des constructions navales près de S. Exc. le Ministre de la Marine.

Sous-Ingénieur, Chef de Bataillon. — M. Gilbert.

GÉNIE MILITAIRE.

Colonels. — MM. Daullé, Prevost-Vernois.

Chefs de Bataillon. — MM. Teissier, Finot, Girardin, Christin, Saint-Hillier.

PONTS-ET-CHAUSSÉES.

Ingénieurs en chef. — MM. Blanchard (Jean-Louis), Robiquet (François).

UNIVERSITÉ.

Inspecteurs généraux. — MM. Rendu (Ambroise), Gueneau (Philibert).

Notaire. — M. Rendu (Athanase).

Sous-Chef du bureau des académies. — M. Douyau.

MAISON DE L'EMPEREUR.

M. Bernard, colonel du génie, *aide-de-camp de* S. M.

Officiers d'ordonnance. — MM. Gourgaud, d'Hautpoul, Delaplace, Lamezan, Pretet.

Nominations à des places dans l'Ecole Polytechnique.

M. Becquerel (Antoine-César), capitaine du génie, ex-élève de l'Ecole Polytechnique, a été désigné par S. Exc. le Ministre

de la Guerre, pour remplir pendant une année l'emploi de sous-inspecteur des études, en remplacement de M. le capitaine Morlet, appelé à d'autres fonctions.

M. Rostan, membre de la Légion d'Honneur, adjudant sous-lieutenant, a été nommé au grade de lieutenant, par décret impérial du 19 août 1812, en remplacement de M. Letaublon, admis à la retraite.

M. Prudhomme (Louis), membre de la Légion-d'Honneur, sergent au 1er. régiment de chasseurs de la garde impériale, a été nommé adjudant sous-officier, en remplacement de M. Rostan.

M. Clerc, chef de topographie depuis le 20 novembre 1806 (par décision de S. Exc. M. le Gouverneur), a été promu au grade de chef de bataillon du corps impérial des ingénieurs-géographes.

M. Pommiés, professeur au lycée Napoléon, a été nommé adjoint aux répétiteurs d'analyse à l'Ecole Polytechnique, pour l'année scholaire 1812—1813.

La treizième session du Conseil de Perfectionnement a été ouverte le 14 novembre 1812, et terminée le

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole, Président :

S. Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics, membres désignés par la loi :

MM. Legendre, Lacroix, Ferry, Dulong.

Membres de l'Institut national, pris, selon la loi, dans la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques :

MM. les comtes Laplace, Lagrange, Berthollet.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre :

MM. Cotty, officier supérieur d'artillerie; le chevalier Allent, officier supérieur du génie; Bottée, administrateur général des poudres et salpêtres; Jacotin, colonel au corps des ingénieurs-géographes.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine :

MM. le comte Sugny, inspecteur-général d'artillerie de la marine; le baron Sané (1), inspecteur-général du génie maritime.

Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur :

MM. Prony, inspecteur-général des ponts-et-chaussées; Lefebvre d'Hellencourt, inspecteur-général des mines.

Directeur des études de l'Ecole Polytechnique :

M. Durivau.

Commissaires choisis par le conseil d'instruction de l'Ecole, parmi ses membres :

MM. le comte Monge, Gardeur-Lebrun, Gay-Lussac, Thénard.

Secrétaire du Conseil :

M. Marielle, quartier-maître trésorier de l'Ecole Polytechnique.

CONCOURS DE 1812.

Examinateurs pour l'admission dans les Services publics.

Analyse, Mécanique. — MM. Legendre, Lacroix, *examinateurs permanens.*

Géométrie descriptive; analyse appliquée à la Géométrie; Physique. — M. Ferry.

Chimie. — M. Dulong (*Voy.* pag. 477).

Examinateurs pour l'admission à l'Ecole Polytechnique.

Paris..............................	M. Reynaud.
Tournée du sud-ouest.......	M. Dinet.
Tournée du nord-est.........	M. Labey.
Tournée du sud-est...........	M. Francœur.

Les examens ont été ouverts le 1er. août, et les cours, pour

(1) Remplacé par M. Rolland, chef du Génie maritime et membre du Conseil des Constructions, à Paris.

la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, le 29 septembre 1812, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

Quatre cent soixante-dix-sept candidats ont été examinés;

SAVOIR:

A Paris	218	477.
Dans les départemens	259	

Sur ce nombre ont été jugés admissibles;

SAVOIR:

De l'examen de Paris	184	357.
Des départemens	173	

6 candidats ont été rejetés du concours; et 4 reculés dans l'ordre d'admission, par défaut d'exercice dans l'art du dessin.

7 candidats ont de même été rejetés du concours, et 2 reculés, par défaut d'instruction suffisante en littérature latine.

3 ont été rejetés à cause de l'analyse grammaticale, et 2 pour s'être communiqué leurs traductions.

1 candidat a été écarté du concours pour raison d'infirmité corporelle.

Le nombre des candidats admis par le Jury a été de 184, sur ce nombre 5 ont donné leur démission. Le nombre des candidats admis est resté par conséquent de 179;

SAVOIR:

De Paris	99	179
Des départemens	80	
Nombre des élèves admis à l'École jusqu'au 1er. novembre 1811		2638

Total des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement,

A Paris	1352	2817
Dans les départemens	1465	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole;

SAVOIR:

A Paris	2917
Dans les départemens	3638
Total des candidats	6555

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des 179 *candidats admis à l'Ecole impériale Polytechnique, suivant la décision du Jury, du* 29 *septembre* 1812.

Nota. Les listes arrêtées par le Jury contenoient 184 candidats; mais sur ce nombre il y en a 5 qui n'ont pas rejoint et ont envoyé leur démission.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Amelot.	Claude-Louis.	Besançon.	Doubs.
André.	Claude-Bernard-Emile.	Sémur.	Côte-d'Or.
Babinet.	Jacques.	Lusignan.	Vienne.
Balleroy.	Jean-Baptiste-Décadi.	Pont-l'Evêque.	Calvados.
Bauchetet.	Jean.	Châlons.	Saône-et-Loire.
Bayard.	Charles.	Baltimore.	Etats-Unis d'Am.
Beauvais (de).	Ambroise-Lambert.	Paris.	Seine.
Becquey.	François.	Châlons.	Marne.
Bernard Chambinière.	Emile.	Niort.	Deux-Sèvres.
Bert.	Zéphirin-René.	Poitiers.	Vienne.
Blanq-Desiles.	J.-J.-Marie-Mathieu.	Bourg.	Ain.
Blanquet - Duchayla.	Armand.	Chartres.	Eure-et-Loire.
Bleuart.	Jean-Raphaël.	Paris.	Seine.
Boisgiraud.	Jean-Pierre-Thomas.	Gemozac.	Charente-Infér.
Boisson.	Laurent.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Boutelaud.	Pierre-Amédée.	Cognac.	Charente.
Bouvier.	Louis-Charles.	Genève.	Léman.
Bouzane-Desmazery.	Gabriel.	Tours.	Indre-et-Loire.
Bruneau.	Michel-Julien-René.	Cossé-le-Vivien.	Mayenne.
Brunet.	Louis	Châlons s.-Saône	Saône-et-Loire.
Burnier.	André-Elisabeth.	Chambéry.	Mont-Blanc.
Canton.	Bernard-Prosper.	Oleron.	Basses-Pyrénées.
Carnot.	Sadi.	Paris.	Seine.
Cauchy.	Philippe-François.	Abbeville.	Somme.
Céas.	Cl.-Gasp.-L.-Étienne.	Gap.	Hautes-Alpes.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Chapelié.	Jean-Jacques-Edouard.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Chapptin.	Achille.	Auxerre.	Yonne.
Chardonneau.	Joseph-Fortuné.	Rochefort.	Charente-Infér.
Chasles.	Michel.	Epernon.	Eure-et-Loire.
Chausson.	Simon-Pierre-Florent.	Avallon.	Yonne.
Chere.	Joseph-Bonaventure.	Offlange.	Jura.
Cicille.	François-Marie.	Nemours.	Seine-et-Marne.
Coignet.	Robert-Paul.	Paris.	Seine.
Colson.	Pierre-Charles.	Grenoble.	Isère.
Conscience.	François-Pierre.	Nanci.	Meurthe.
Corneilhan.	Jean.	Fraisinet.	Lot.
Cornely.	François-Xavier.	Boppard.	Rhin-et-Moselle.
Coste.	Louis-Marie-Prosper.	Béziers.	Hérault.
Couillerot-Descharières.	Charles-Saint-Amand.	Paris.	Seine.
Coullet.	Pierre.	Saint-Etienne.	Loire.
Courmand.	Timoléon-Julien-Raym.	Paris.	Seine.
Cournon.	Gilbert-Henri-Amable.	Aigueperse.	Puy-de-Dôme.
Couty.	Jean-Baptiste.	Bounat.	Haute-Vienne.
Creuly.	Casimir.	Cherbourg.	Manche.
D'albiat.	Pierre-Hubert.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Dalican.	Charles-Joseph-Hypp.	Château-Thiéry.	Aisne.
Dauche.	Emile.	Paris.	Seine.
David.	Nicolas-Henri.	Verdun.	Meuse.
Delamare.	Adolphe-Edvige-Alph.	Paris.	Seine.
Delaporte.	Théodore.	Remaisnil.	Somme.
Delaroche.	Grégoire.	Villautrois.	Indre.
Delmas.	Anacréon.	Marsillargues.	Hérault.
Demonferrand.	Jean-Baptiste-Firmin.	Issoudun.	Indre.
Desmaisieres.	Desiré-François.	Ming.	Nord.
Desmaisieres.	Léandre-Ant.-Joseph.	Derendorff.	près Dusseldorff.
Desse.	Louis-Etienne.	Carignan.	Ardennes.
Devaux.	Jean-Adolphe-Joseph.	Neuss.	Roër.
Dollone.	Charles-Pierre.	Fauconcourt.	Vosges.
Doucet.	Jean-Denis-Alexandre.	Langé.	Indre.
Dubain.	Jules-Joseph.	Beaugency.	Loiret.
Dubois.	Jean-Louis.	Paris.	Seine.
Dufraisse.	Julien-Pierre.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Duport.	Jean-Louis-Amédée.	Cheux.	Calvados.
Durivau.	Hyppol.-Jean-Jacques.	Quimper.	Finistère.
Duviquet.	Hyppolite.	Lyon.	Rhône.
Duvivier.	Franciade-Fleurus.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Escanyé.	Ferd.-Jos.-Jean-Sébast.	Vinça.	Pyrenées-Orient.
Fabre.	Augustin.	Draguignan.	Var.
Falret-Lagasquie	Ambroise-Publicola.	Marcilhac.	Lot.
Faulte du Puyparlier.	Auguste-Pierre-Jacques	Limoges.	Haute-Vienne.
Fleury.	Claude-Raulin.	Ecquemarre.	Eure.
Forfait.	Alexandre.	Rouen.	Seine-Inférieure.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Foyer.	Clément.	Beauvais.	Oise.
François.	Prosper.	Paris.	Seine.
Gacon.	Antoine-Joseph.	Paris.	Seine.
Gaillard.	Frédéric.	Loudun.	Vienne.
Gambini,	Joseph-Henri-Louis.	Baldichieri.	Marengo.
Gavard.	Jacques-Dom.-Charles.	Paris.	Seine.
Gay.	Augustin.	Dôle.	Jura.
Geneix.	Jean.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Germain.	François Augustin.	Réchicourt - le - Château.	Meurthe.
Giorgini.	Gaétan-Vincent-Benoît.	Montignoso.	Pr. de Lucques.
Godebert.	Charles-Franç.-César.	Brest.	Finistère.
Godin.	Edouard-Florent.	Huy.	Ourte.
Grangeneuve.	Maurice.	Bordeaux.	Gironde.
Guillery.	Hippolyte.	Versailles.	Seine-et-Oise.
Guy.	Pierre-Gabriel.	Agde.	Hérault.
Henryot.	Charles-Théodore.	Nogent.	Haute-Marne.
Hoart.	Pierre-Denis.	Paris.	Seine.
Huyn.	Gilbert.	Paris.	Seine.
Imbert, *dit* St.-Brice.	Penn-Affrodise-Justin.	Brioude.	Haute-Loire.
Jeannin.	Jean-Baptiste.	Paris.	Seine.
Johanys.	Pierre-Ferdinand.	Romans.	Drôme.
Lacoste.	Hubert-Léonidas.	Pont-à-Mousson.	Meurthe.
Laffeuillade.	Jean-Pierre.	Vic-Bigorre.	Hautes-Pyrénées.
Laroyenne.	Célestin.	Froide-Terre.	Haute-Saône.
Laurent.	Paul.	Paris.	Seine.
Lebas.	Marie-Tranquille.	Le Luc.	Var.
Le Corbeiller.	Frédéric.	Brunoy.	Seine-et-Oise.
Lenglet.	Etienne-Henri-Franç.	Bapaume.	Pas-de-Calais.
Léonard.	Auguste-Franç.-Brutus	Paris.	Seine.
Malaret.	Jean-Victor-Scœvola.	Pezenas.	Hérault.
Mareschal.	Armand-Adrien.	Salmaize.	Côte-d'Or.
Marminia.	Charles-Fr.-Narcisse.	Doullens.	Somme.
Marque-Doncour	Hector-Jean.	Lanty.	Haute-Marne.
Martin.	François-Marie-Emile.	Soissons.	Aisne.
Martin.	Jean-Baptiste-Aristide.	Consolens.	Charente.
Mart[illegible]	Henri-Camille.	Lunéville.	Meurthe.
Méjasson.	Noel-Benoît.	La Pacaudière.	Loire.
Ménard.	Ch.-Mar.-Fr.-Stanislas	Blois.	Loir-et-Cher.
Mengin.	Fr.-Jos.-Marie-Gabriel	Nanci.	Meurthe.
Métais.	Antoine-Louis.	Auteuil.	Seine.
Michaud.	J.-B.-François-Justin.	Conliége.	Jura.
Michelin.	Guillaume-Louis-Adelle	Paris.	Seine.
Millot.	Louis.	Philadelphie.	Etats-Unis d'Am.
Miollis.	Augustin.	Aix.	Bouc.-du-Rhône.
Molinos.	Achille-Louis-Nicolas.	Paris.	Seine.
Moly.	Amans-Edouard.	Sales-la-Source.	Aveyron.
Motte.	Félix-Antoine-Joseph.	Douai.	Nord.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Noel.	François-Auguste.	Crouy sur-Ourcq.	Seine-et-Marne.
Noel.	Nicolas-Jacques.	Carteret.	Manche.
Noel.	Auguste-Franç.-Pierre.	Châlons.	Marne.
Odernheimer.	Frédéric.	Oberingelheim.	Mont-Tonnerre.
Ollivier.	Maurice.	Torcé	Mayenne.
Osmond.	Abel.	Saint-Fbremond de Bon-Fossé.	Manche.
Oration.	Claude.	Châlons.	Saône-et-Loire.
Pacotte.	Léon.	Paris.	Seine.
Parchappe.	Narcisse.	Épernay.	Marne.
Petit.	Jean-Jacques.	Besançon.	Doubs.
Petit.	Narcisse.	Bezu-la-Forêt.	Eure.
Petit.	Joseph.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Pin.	François.	Lyon.	Rhône.
Pinel.	Paul-Augustin.	Le Havre.	Seine-Inférieure.
Pinot.	Ferdin.-Franç -Pierre.	Avranches.	Manche.
Poudra.	Noel-Germinal.	Paris.	Seine.
Poullain-de-St.-Foix.	Emile.	Paris.	Seine.
Pouzin.	Franç.-Hugues-Roméo.	Montpellier.	Hérault.
Pradal.	Pierre.	Perpignan.	Pyrénées-Orient.
Prat.	Marie-Louis-Valentin.	Nayrac.	Aveyron.
Puech.	Charles-Joseph.	Brasc.	Aveyron.
Puibusque.	Jacques.	Angers.	Maine-et-Loire.
Raffard.	Antoine-Joseph.	Vaudiné-les-Scrrières.	Ardèche.
Ranfrai - Bajonnière.	Armand-Henri.	L'Orient.	Morbihan.
Reboul.	Henri-Romain-Aristide.	Pezenas.	Hérault.
Reibell.	Félix-Jean-Baptiste.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Renault.	Jean-François.	Londres.	Angleterre.
Reverdit.	Joseph.	Bargemon.	Var.
Reverony.	Henri.	Reinsberg.	Prusse.
Reydellet.	Julien-Elizée.	Nantua.	Ain.
Robelin.	Claude-Pierre.	Beaune.	Côte-d'Or.
Rochet.	Mirtil.	Paris.	Seine.
Ronin.	Jacques-Auguste.	St.-Tropez.	Var.
Roux.	Jean-Chéri.	Angers.	Maine-et-Loire.
Rubin de la Missonnais.	Henri-Louis.	Vitré.	Ille-et-Vilaine.
Ruel.	Joseph-Hilarion.	Belgencier.	Var.
Sain Mannevieux	Paul-Emile.	Lyon.	Rhône.
Salneuve.	Jean-Félix.	Paris.	Seine.
Santeul.	Mirthil.	St.-Germain.	Seine-et-Oise.
Sazerac de Forges	André-Benoît.	Angoulême.	Charente.
Seré.	Jean-Henri-Edouard.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Silvestre.	Louis-Catherine.	Paris.	Seine.
Sirurguet.	Jean-Jacques.	Dijon.	Côte-d'Or.
Stein.	Jean-Pierre-Guillaume.	Trèves.	Sarre.
Surdey.	Antoine-Joseph.	Besançon.	Doubs.

NOMS.	PRENOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Tellier.	Jacques-Louis-Armand.	Aguetz.	Oise.
Terrasson.	Jean-Pierre-Laurent-Washington.	Paris.	Seine.
Thiéry.	Alfred.	Dunkerque.	Nord.
Tiby.	Claude-Jacques-Franç.	Paris.	Seine.
Tirel-Martinière.	Charles-François.	Grandville.	Manche.
Treins.	Jean-Baptiste.	Egletons.	Corrèze.
Verger-Desbarreaux.	Edouard.	Angers.	Maine-et-Loire.
Veyrassat.	Paul-Samuel-Jacques.	Genève.	Léman.
Vidé.	Jean-Alexandre.	La Rochelle.	Charente-Infér.
Visquain.	Jean-Baptiste-Joseph.	Tournay.	Jemmappes.
Villemain.	François-Emile.	Paris.	Seine.
Viollette.	Antoine-Jos.-Norbert.	Fressin.	Pas-de-Calais.
Vuilleret-de-Brotte.	Nicolas-Victor.	Cretenay.	Jura.
Watbled.	Jacob.	Paris.	Seine.
Wetzell.	Joseph-Martial.	Arras.	Pas-de-Calais.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Listes, par ordre de mérite, des élèves admis dans les services publics, depuis le 1er. novembre 1811 *jusqu'au 1er. janvier* 1813*, suivant les décisions du Jury, présidé par S. Exc. M. le Gouverneur, et composé des examinateurs d'admission dans les services publics.*

ARTILLERIE DE TERRE.

En février 1812.

MM. Berjaud, Grégoire, Merle, Bouvet, Surineau, Policarpe, Blanc, Cohendet, Colomb, Brongniart, Voysin-Gartempe, Martin-de-Julvecourt, Thiry, Donnat, Terson-Paleville, Sehols, Gazeau-de-Labouère, Lerebours de la Pigeonnière, Pérignon, Charreyron, Planquette, Loret, Barbier, Cabrol, Mercier, Caffort, Imbert *dit* Saint-Brice (M.-T.-P.), Peloux, Vergnaud, Hubert, Gazan, Pauzié-Banne, Chaillou (R.), Boussac, De Grave, Fourmond, Chouillou, Godard-de-Rivocet, Chaillon (A), Melon de Pradou, Marty, Fabian, Madelaine, Moynier, Coste, Rabaïoye, Thiéry, Rouvrois,

Vernety, Jarrige-Lamazorie, Karth, Girot, Gorrard, Gilbert de Gourville, Yver, Mocquard, Chayé, Jacquiné, Bálaran, Lelièvre........ 60

En septembre 1812.

MM. Métayer, Grillet-Serry, Lenfumé, Ogée, Maléchard, Boucquel-Beauval, Godin, Dieudé, Luguet, Lejeune, Chauvet, Bertin, Coursin, Lebon-d'Haubersin, Monmartin, Muthuon, Guillard, Guilhou, Laugaudin, Marcilhac, Murat, Leroy (J.-D.), Mahieux, Bompard, Berdolle, Harmand, Guy (A.-M.), Crémoux, Castaing, Michel-D'Anserville........ 30

GÉNIE MILITAIRE.

MM. Gosselin, Blevec, Larabit, Sorel, Douet, Chiodo, Vieux, Lefebvre (A.-J.-M.), Moreau, Belmas, Dumay, Guy (J.-P.-A.), Gaide, Fabre, Ythier, Robert de Saint-Vincent, Forget de Barst, Lambert (C.-J.), Perreau, Ronmy, Le Marcis, Morin, Redoutey, Gérard, Perruchot, Michelot, Nether, Bruno, Urtin, Gauthier, Sibilet, Soleirol, Viquesnel, Dechauvenet, Olivier (A.-J.-A.) Dessalle, Roullion, Rousset, Fiévée, Falret, Rocquancourt, Liadiéres, Lefebvre (C.-E.), Desfeux, Tassain, Grimouville, Broquard-de-Bussières, Lagarrigue, Collas-Gourval, Fauquez........ 50

INGÉNIEURS-GÉOGRAPHES.

MM. Decaïeu, Benoît, Coueffin........ 3

POUDRES ET SALPÊTRES.

MM. Durand, Lermier........ 2

PONTS ET CHAUSSÉES.

MM. Billaudel, Guillemot, Lacave, Girard, Néhou, Dumas, Bayard, Vauquelin, Lecarpentier, Doucet........ 10

MINES.

MM. Lambert (C.-J.-E.), Despine........ 2

CONSTRUCTION DES VAISSEAUX.

MM. Larchevêque-Thibaud, Liénard, Bésuchet, Duplan. 4

TROUPES DE LIGNE.

M. Labarbe (J.-M.), nommé sous-lieutenant dans le onzième régiment d'infanterie légère.... 1

Sortis de l'Ecole par démission, mort, etc.

Démissionnaires ou sortis sans être placés.— MM. Ajasson de Grandsagne, Arnoux, Barthes, Buisson, Bryon, Cornisset, Cramouzaud, Domergue, Gohard, Lindenmeyer, Mieussens, Paulin.. 12

N'a pas rejoint. — M. Gilbert, élève de la promotion de 1811.. 1

Morts { *à l'Ecole.* — MM. Bottex, Godard-d'Isigny, Monnet.. 3 ; *hors de l'Ecole.* — MM. Crova-Vaglio, Pressou.. 2 } 5

ETAT *de situation des Élèves de l'École Polytechnique, à l'époque du 1er. janvier 1813.*

L'Ecole étoit composée, au 1er. novembre 1811, de 341 élèves.

Elle a perdu depuis cette époque jusqu'au 1er. janvier 1813,

SAVOIR :

Morts	5	18	180
Démissionnaires	12		
N'a pas rejoint	1		
Admis dans les services publics.			
Artillerie de terre	90	162	
Génie militaire	50		
Ingénieurs-Géographes	3		
Poudres et Salpêtres	2		
Ponts-et-chaussées	10		
Mines	2		
Construction des vaisseaux	4		
Nommé sous-lieutenant dans la ligne	1		

Il restoit 161
Elèves admis à l'Ecole à dater du 1er. novembre 1812... 179

Total des Élèves composant l'Ecole Polytechnique au 1er. janvier 1813 340

SAVOIR :

1re. division	154	340
2e. division	186	

TABLE

Des matières contenues dans le second volume de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique.*

Ce volume est composé de cinq cahiers publiés à différentes époques, depuis le mois de janvier 1809, *jusqu'au mois de mars* 1813. Dix-huit planches, dessinées par M. *Girard*, sont jointes à ce volume.

1er. Cahier. — *Janvier 1809.*

§. Ier. — *Sciences mathématiques.*

§. II. — *Sciences physiques.*

§. III.

§. IV et V.

§. VI.

2e. Cahier. — *Janvier 1810.*

§. Ier. — *Sciences mathématiques.*

§. II. — *Sciences physiques.*

§. III.

§. IV.

§. V.

3e. Cahier (*). — *Janvier 1811.*

§. Ier. — *Sciences mathématiques.*

---

(1) C'est par erreur que la première page de ce cahier est cotée 187; tous les numéros des pages qui suivent, sont trop grands de 50.

§. II. — *Sciences physiques.*

§. III.

§. IV.

§. V.

4e. Cahier. — *Juillet 1812.*

§. Ier. — *Sciences mathématiques.*

§. II.

§. III.

5e. Cahier. — *Janvier 1813.*

§. Ier. — *Sciences mathématiques.*

§. II. — *Sciences physiques.*

§. III.

§. IV. — *Personnel.*

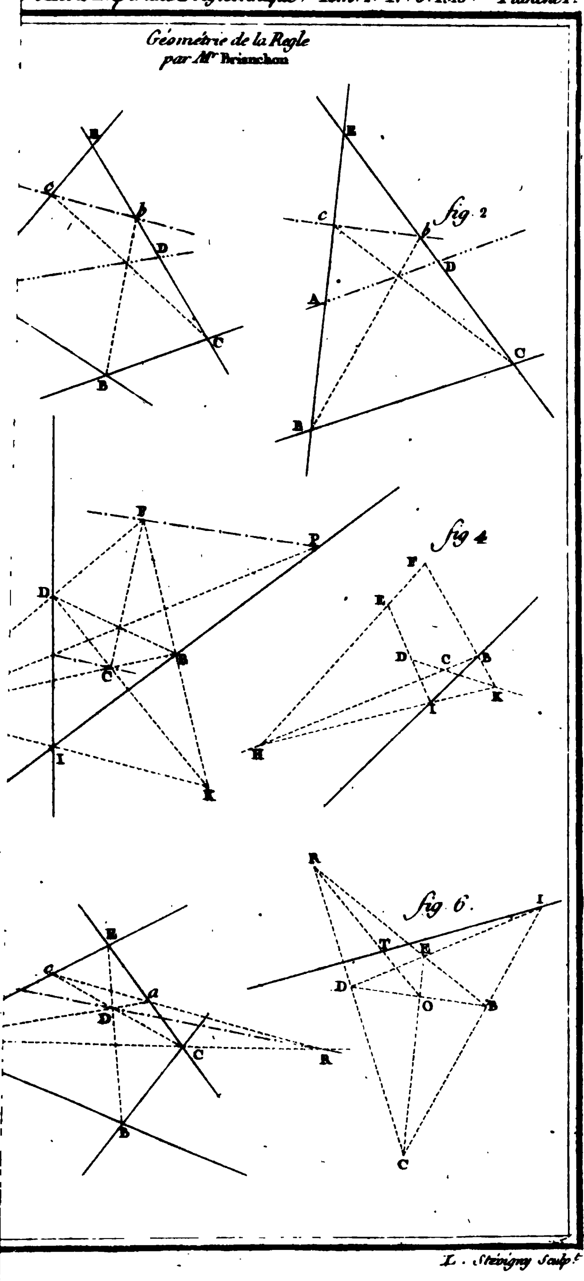

Géométrie de la Règle
par Mr Brianchon
fig. 2
fig. 4
fig. 6.
L. Stévigny Sculp.t



Fig. 2.

L I K D M E G H F A B C

Fig. 1ère

M m o T t A p P

Fig. 3.

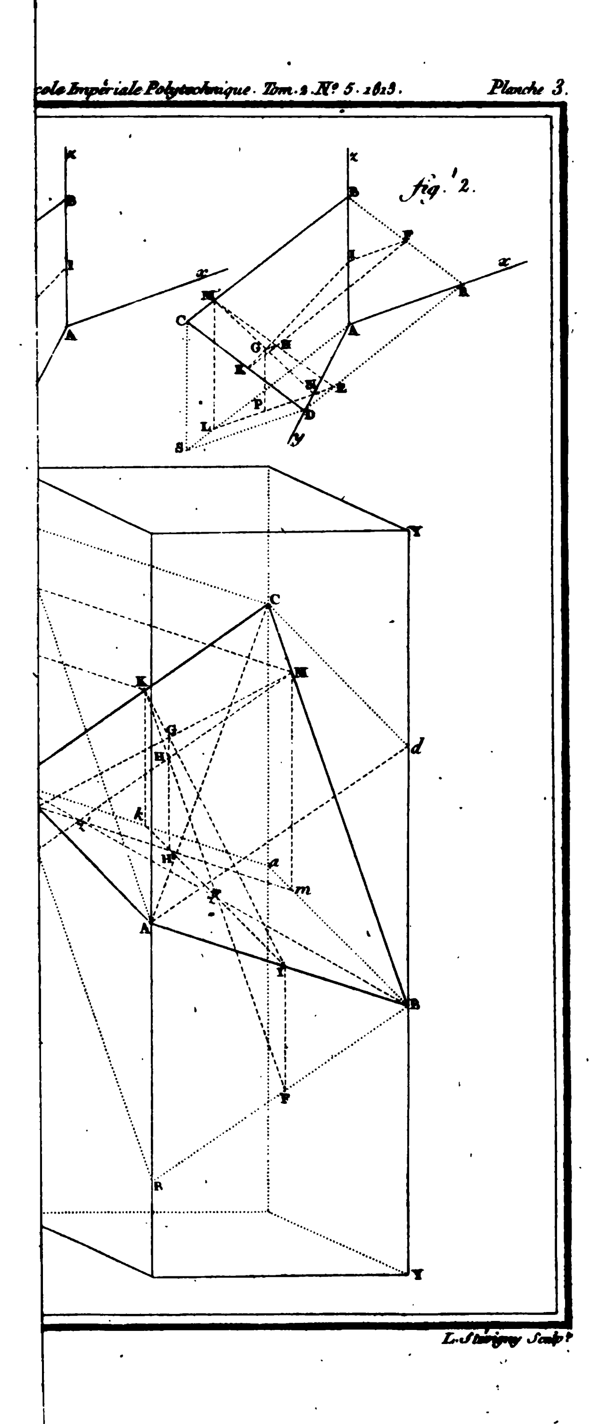
M m O m' o K N I X t' t T p' p P

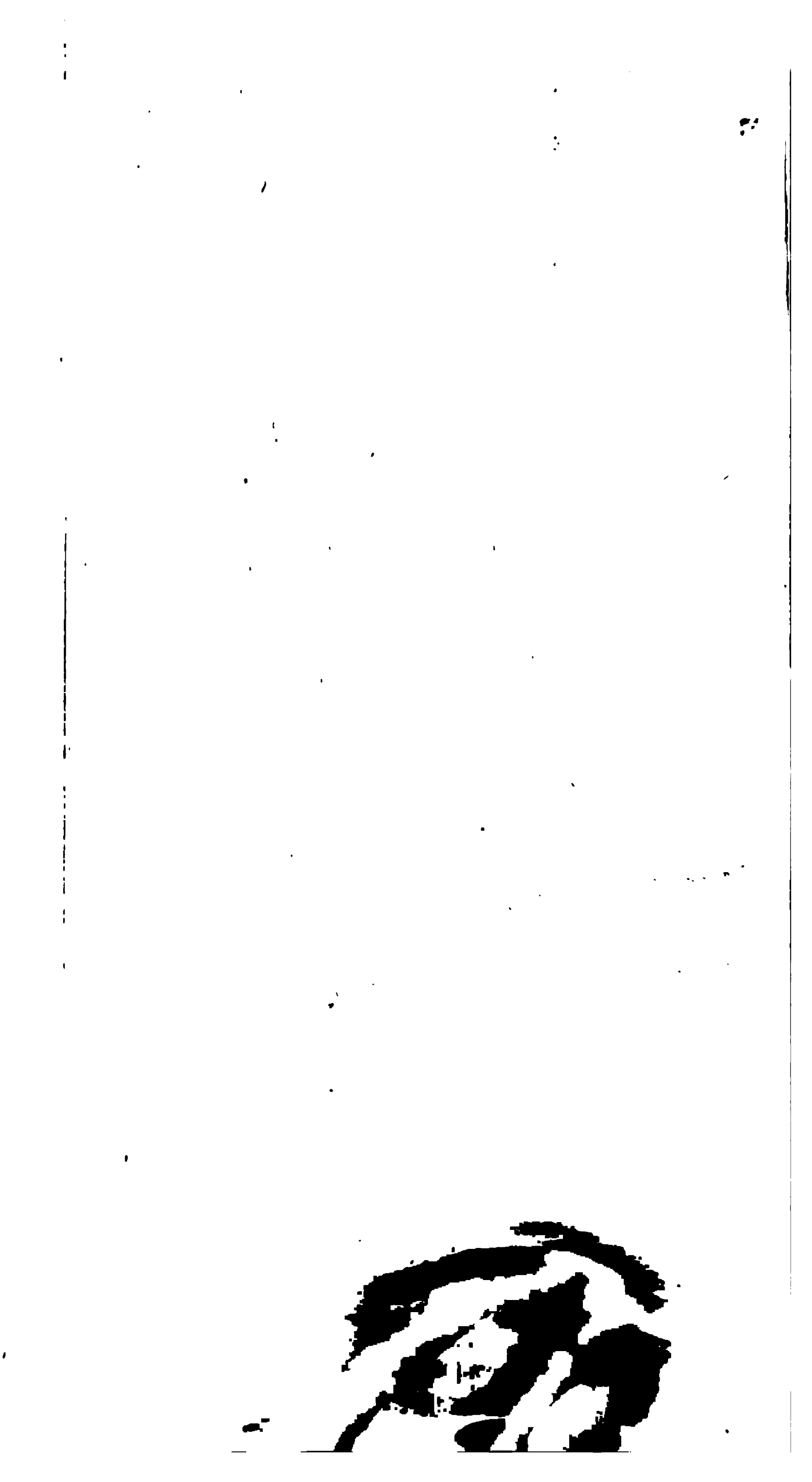
R X

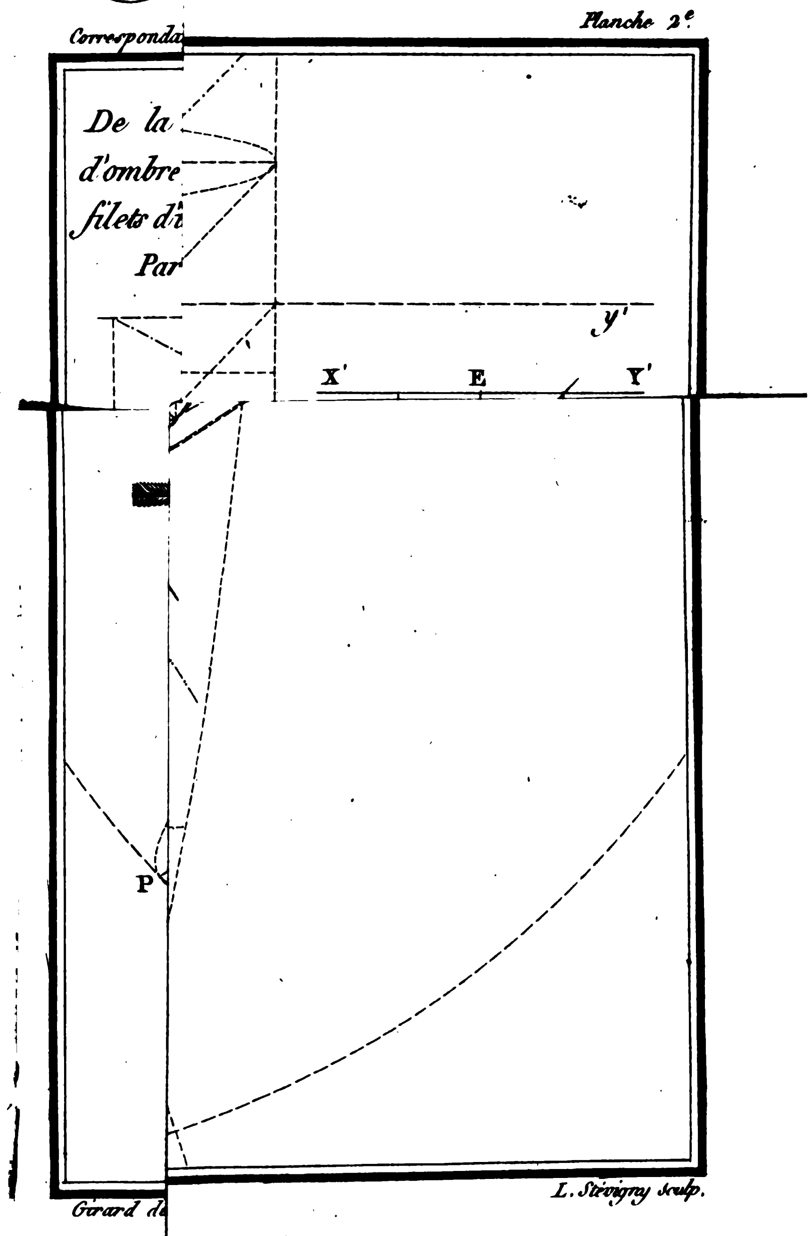
O ω m n A F G O' B m' D

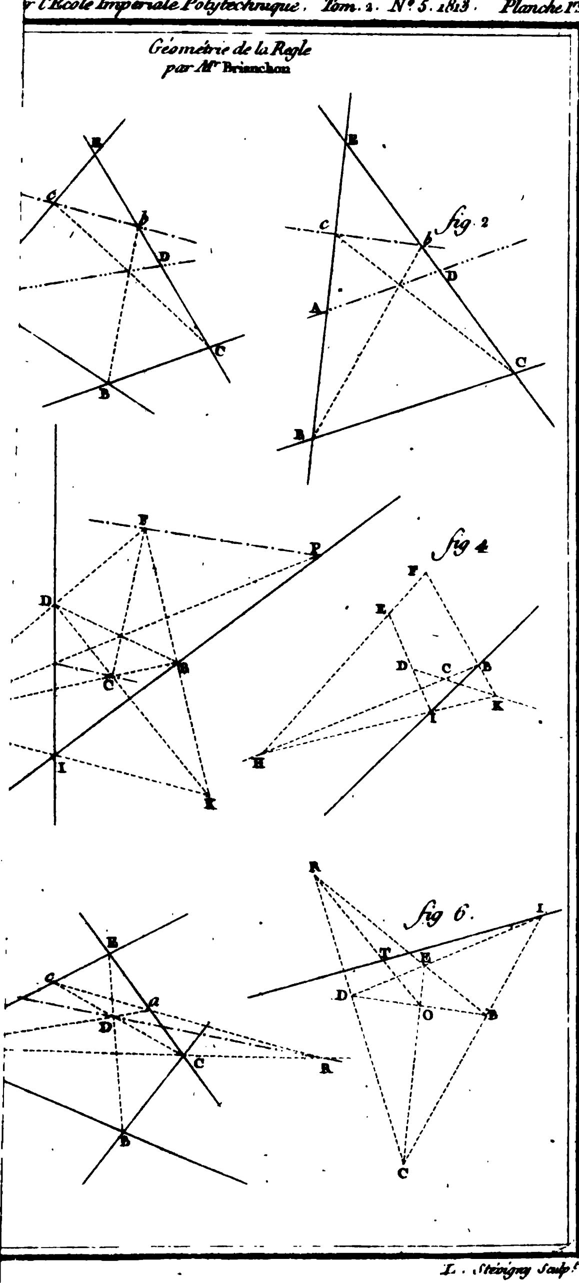
L. Sewigny Sculp.

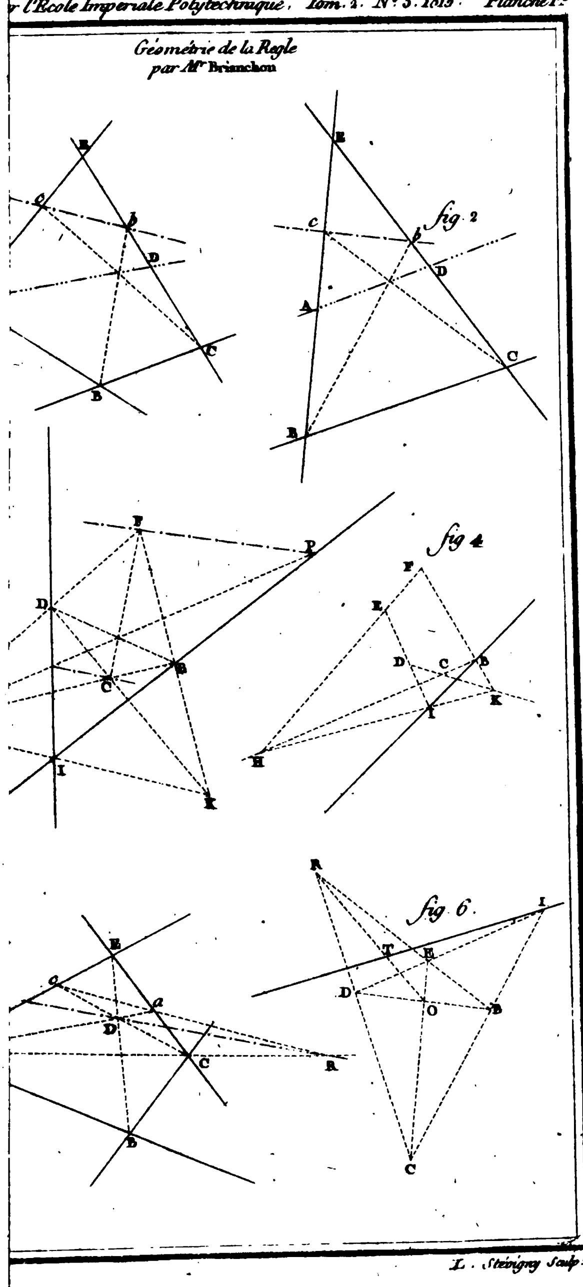



fig. 2.




Correspond
Planche 2e.
De la
d'ombre
filets d'
Par
y'
X'
E
Y'
P
Girard d
L. Stévigny Sculp.


r l'Ecole Impériale Polytechnique. Tom. 2. N° 5. 1813. Planche Ire
Géométrie de la Regle
par Mr Brianchon
fig 2
fig 4
fig 6.
L. Steinigny Sculp.



L. Stévigny Sculp.

